■ 理工系数学の基礎・基本 ⑮

# 曲線と曲面の基礎・基本

■ 福井敏純著

■ 牧野書店

# まえがき

幾何学は，論証が重視された古代ギリシャ数学に起源を持つ．時には補助線を引いて鮮やかに証明を展開した．デカルトが座標を導入して以来，補助線を引かずに計算で幾何学的対象の性質を調べることが可能になった．微分積分学の発達と共に，曲線や曲面が研究対象として認識され，いろいろな曲線や曲面が調べられその性質が明らかにされてきたと言ってよい．微分幾何学の誕生である．そこで展開された計算はオイラー数など位相的な量を導入することで整理され，後年の位相幾何学（トポロジー）の展開につながっていく．

本書は，微分積分学をひと通り学んだ後，その応用として曲線や曲面の基礎事項を習得したいと想う読者を想定して書かれている．したがって，本書の題材は古典的であり，微分幾何学の初歩として，多くの類書に述べられている内容とかなり重複する．平面曲線や3次元ユークリッド空間内の曲線や曲面を題材に，曲率の概念を解説しガウス・ボンネの定理に至る道などがそうである．

本書の特徴を敢えて述べれば，論理的厳密性を求めて過剰に解説することをせず，証明のアイデアを述べることを優先したこと，抽象的概念をあまり出さずに実質の計算を重視したこと，位相幾何学との関連も念頭に解説したこと，などである．

予備知識をあまり仮定しないで幾何の面白さを伝えることを目的とし，できるだけ平易な記述を心掛けたが，わかりにくい部分や誤りがあればそれは著者の責任である．

幾何学を学びたいと思えば，現在では多様体の基礎の知識は避けて通れない．しかしながら，本書では敢えて多様体の解説はしない．概念よりその背景にある例や計算を重視したいからである．幾何の面白さを体得するには，計算

で幾何学的性質を明らかにしていく体験が欠かせないと感じる．本書がその体験を望む読者へのガイドになれば，著者としては大変嬉しく思う．

2015 年 1 月

福井　敏純

# 目　次


まえがき　i

第1章　曲　線　1

1.1　曲線の定義と例 …… 1
1.2　弧長変数 …… 8
1.3　曲　率 …… 14
1.4　伸開線と縮閉線 …… 23
1.5　包絡線 …… 27
1.6　閉曲線 …… 33
1.7　空間曲線 …… 45

第2章　曲　面　59

2.1　曲面の定義と例 …… 59
2.2　1階偏微分と第1基本形式 …… 65
2.3　2階偏微分と第2基本形式 …… 71
2.4　曲面上の曲線と曲面の曲率 …… 75
2.5　3階偏微分と曲面論の基本定理 …… 83
2.6　測地的極座標とガウス・ボンネの定理 …… 89
2.7　曲面のいろいろな座標 …… 98

第3章　いくつかの話題　111

3.1　世界地図 …… 111
3.2　双曲平面 …… 116
3.3　極小曲面 …… 122
3.4　曲面と平面・球面との接触 …… 129
3.5　ポアンカレ・ホップの定理 …… 138
3.6　曲率線と漸近線の特異点 …… 150
3.7　等温座標の存在について …… 157

演習の解答例　173

あとがき　193

索　引　197

# 第1章 曲　線

デカルトが平面に座標を導入して以来，様々な曲線が認識され，研究されてきた．本章では，弧長の定義から説き起こして，曲率をキーワードに曲線の基礎事項を解説する．後半は閉曲線が話題の中心となり，平面閉曲線の回転数や4頂点定理，ミルナーによる空間閉曲線の全曲率の屈曲度による評価や，トポロジーの故郷であるガウスの絡み目積分などを解説する．微積分の基礎知識があれば理解できる内容であるが，最終節は，第2章に説明する曲面の面積要素の知識を用いる箇所がある．

## 1.1 曲線の定義と例

日常では，曲線はまっすぐではない曲がった線，つまり直線ではない線を意味する語である．しかしながら，数学では，曲線はその特別な場合として直線や線分を含む概念である．

**■ 曲線の径数表示**　$I$ を区間として，連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を**曲線** (curve) と呼ぶ．$t$ をこの曲線の径数[1]という．平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線であるから，**平面曲線**と呼ぶこともある．日常の語感からいえば，写像 $\gamma$ の像を曲線と呼ぶのが自然かもしれないが，数学では，写像 $\gamma$ 自身を曲線と呼ぶのが慣用である．一般に，連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ を**曲線** (curve) という．正確には $\mathbb{R}^n$ 内の曲線であ

[1]径数は parameter の訳語である．parameter の訳語としては，最近では媒介変数または助変数が普通で，径数は古いと思われる向きもあろう．係数と音が同じで嫌う方もおられる．しかし one parameter family を 1 媒介変数族，または 1 助変数族と訳しては日本語として重い印象があるし，意味を考えると漢字「径」は相応しく思える．以上を勘案して，本書では径数の訳語を使うことにした．

る．$\mathbb{R}^2$ 内の曲線を平面曲線と呼ぶのに対し，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線は空間曲線と呼ばれる．さらに，一般に $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 内の曲線を，空間曲線と呼ぶこともある．

$\gamma$ の時刻 $t$ による微分を**速度**と呼び，$\dot{\gamma}$ で表す．$\gamma$ の時刻 $t$ による2階微分 $\ddot{\gamma}$ を加速度という．

**■ 曲線の陰関数表示**　原点を中心とする半径1の円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$ である．これは方程式 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ が定める曲線ということができる．このように，方程式を使って曲線を表すことは，しばしば行われる．

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

の形で曲線を表すやり方を，曲線の陰関数表示という．

**■ 関数のグラフとしての曲線**　$f(x)$ を $x$ を変数とする関数とし，そのグラフ $y = f(x)$ は曲線を表す．この曲線を径数表示すると，

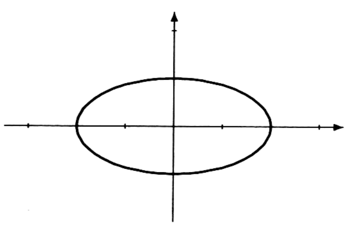
$$t \mapsto (t, f(t))$$

となる．陰関数表示をすると次のようになる．

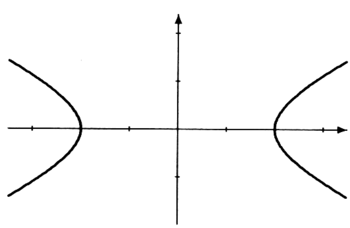
$$\{(x, y) : y - f(x) = 0\}$$

**例 1.1.1**　楕円の径数表示と定義方程式は次で与えられる．

$$\theta \mapsto (a\cos\theta,\ b\sin\theta), \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



楕円 $(a = 2,\ b = 1)$



双曲線 $(a = 2,\ b = 1)$

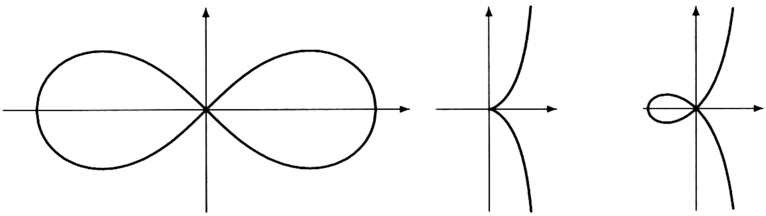
**例 1.1.2**　双曲線の径数表示と定義方程式は次で与えられる．

$$\theta \mapsto (a\cosh\theta,\ b\sinh\theta), \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**例 1.1.3** レムニスケート (lemniscate) は次の定義方程式で与えられる曲線である．

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

極座標で表すと $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ である．



レムニスケート $(a=1)$　シッソイド $(a=1)$　ストロフォイド $(a=1)$

**例 1.1.4** シッソイド (cissoid) は次の定義方程式および径数表示で与えられる曲線である．

$$x^3 + (x-a)y^2 = 0, \qquad x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}$$

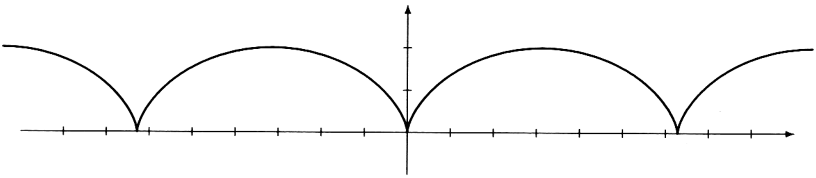
**例 1.1.5** ストロフォイド (strophoid) は次の定義方程式および径数表示で与えられる曲線である．葉形線とも呼ばれる．

$$(x+a)x^2 + (x-a)y^2 = 0, \qquad x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$$

■ **擺線とその仲間**　転がる円が描く軌跡を紹介しよう．

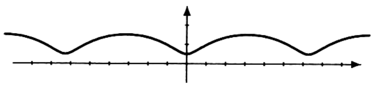
**例 1.1.6** サイクロイド (cycloid, 擺線(はいせん)) は次の径数表示で与えられる曲線である．半径 $r$ の円が $x$ 軸上を滑ることなく転がるとき，この円上の定点が描く軌跡である．

$$\theta \mapsto (x, y) = r(\theta - \sin\theta,\ 1 - \cos\theta) \tag{1.1.1}$$

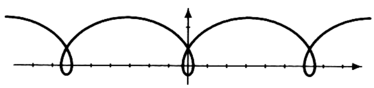


**例 1.1.7**　トロコイド (trochoid, 余擺線) は次の径数表示で与えられる曲線である．半径 $r$ の円が $x$ 軸上を滑ることなく転がるとき，動円の中心から距離 $lr$ にある定点が描く軌跡である．

$$\theta \mapsto r(\theta - l\sin\theta, 1 - l\cos\theta))$$



$r=1,\, l=\frac{1}{2}$

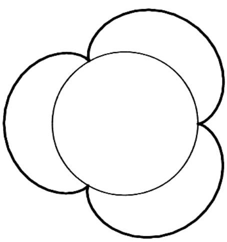


$r=1,\, l=\frac{3}{2}$

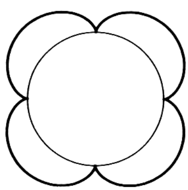
**例 1.1.8**　半径 $r$ の円が半径 $kr$ の円周上を滑ることなく転がるとき，動円上の定点が描く軌跡をエピサイクロイド (epicycloid, 外擺線) といい，次の径数表示で与えられる．

$$\theta \mapsto r(k+1)\left(\cos\theta - \frac{\cos(k+1)\theta}{k+1},\ \sin\theta - \frac{\sin(k+1)\theta}{k+1}\right)$$

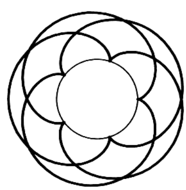
$k$ が有理数ならば閉曲線で，これを既約分数 $p/q$ の形に書いたとき $p$ 個の尖点がある．$k$ が無理数ならば閉曲線ではない．



$k=3,\, r=1$



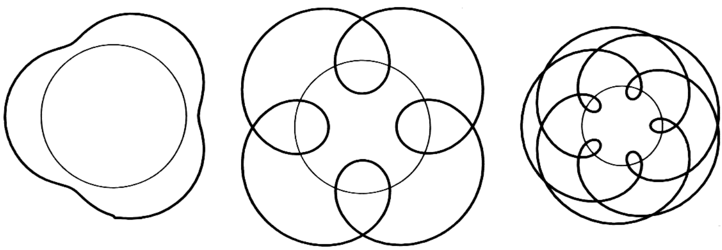
$k=4,\, r=1$



$k=\frac{5}{3},\, r=1$

**例 1.1.9**　エピトロコイド (epitrochoid, 外余擺線) は次の径数表示で与えられる曲線である．半径 $r$ の円が半径 $kr$ の円周に外接しながら滑ることなく転がるとき，動円の中心から距離 $lr$ にある定点が描く軌跡である．

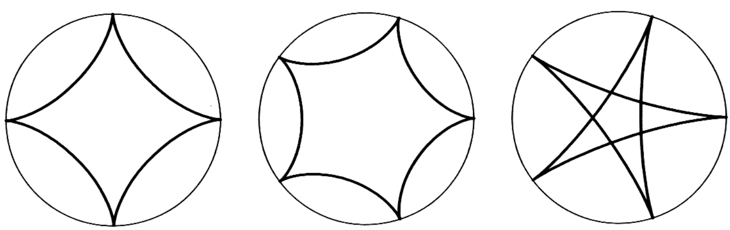
$$\theta \mapsto r(k+1)\left(\cos\theta - \frac{l\cos(k+1)\theta}{k+1},\ \sin\theta - \frac{l\sin(k+1)\theta}{k+1}\right)$$



$k=3,\ r=1,\ l=\frac{1}{2}$　　$k=4,\ r=1,\ l=3$　　$k=\frac{5}{3},\ r=1,\ l=\frac{3}{2}$

**例 1.1.10**　半径 $r$ の円が半径 $kr$ の円周に内接しながら滑ることなく転がるとき，動円上の定点が描く軌跡をハイポサイクロイド (hypocycloid, 内擺線) といい，次の径数表示で与えられる．

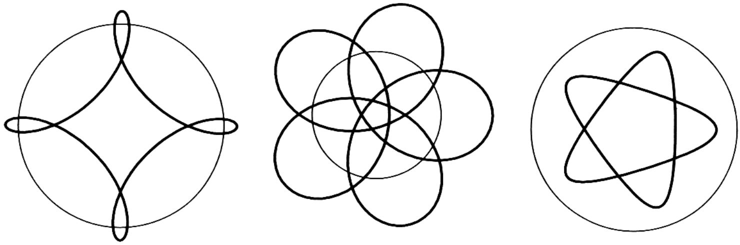
$$\theta \mapsto r(k-1)\left(\cos\theta + \frac{\cos(k-1)\theta}{k-1},\ \sin\theta - \frac{\sin(k-1)\theta}{k-1}\right)$$



$k=4,\ r=1$　　$k=4,\ r=1$　　$k=\frac{5}{2},\ r=1$

**例 1.1.11 (星芒形 (astroid))**　ハイポサイクロイドで $k=4$ のときはアステロイド (星芒形) と呼ばれ，次のような表示をもつ．

$$\theta \mapsto a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta), \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



$k=4,\ r=1,\ l=\frac{3}{2}$　　$k=5,\ r=1,\ l=5$　　$k=\frac{5}{2},\ r=1,\ l=\frac{1}{2}$

**例 1.1.12**　ハイポトロコイド (hypotrochoid, 内余擺線) は次の径数表示で与えられる曲線である．半径 $r$ の円が半径 $kr$ の円周に内接しながら滑ることなく転がるとき，動円の中心から距離 $lr$ にある定点が描く軌跡である．

$$\theta \mapsto r(k-1)\left(\cos\theta + \frac{l\cos(k-1)\theta}{k-1},\ \sin\theta - \frac{l\sin(k-1)\theta}{k-1}\right)$$

スピログラフという玩具を使うと，ハイポトロコイドの絵を描くことができる．

**■ グリセット**　2つの曲線（または直線）$C, D$ を考える．長さ一定の線分を用意して，その上に描画点を固定し，線分の一方の端を曲線 $C$ に，もう一方の端を曲線 $D$ に乗るように線分を動かしたとき，描画点の動く曲線をグリセット (glissette) という．

**例 1.1.13（ワット曲線）**　長さ $2c$ の線分が，一方の端点が $(a,0)$ を中心とする半径 $b$ の円周上に他方の端点が $(-a,0)$ を中心とする半径 $b$ の円周上にあるとき，線分の中点が描く軌跡をワット (Watt) 曲線という．蒸気機関を発明したワットである．この曲線の極座標による表示は，次で与えられる．

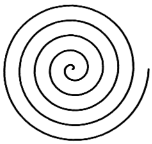
$$r^2 = b^2 - (a\sin\theta \pm \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\theta})^2$$

Google などで「Watt curve」をキーワードにして検索するとワット曲線の図を見付けることができる．

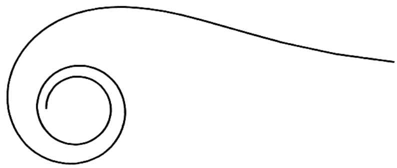
**■ 螺線**　螺線 (spiral)[2]の仲間を紹介する．

[2]螺とは巻貝のことで，螺旋は巻貝の殻の線のように旋回した筋や，螺子を指す．『広辞苑』によると螺線とは渦巻状の空間曲線のことであり，平面曲線は渦巻と呼んでいる．しかし，対数渦巻，アル

**例 1.1.14（代数螺線）** $r = a\theta^k$ の形に書ける螺線．$k = 1$ のときはアルキメデスの螺線，$k = 1/2$ のときは放物螺線（またはフェルマ (Fermat) 螺線），$k = -1/2$ のときはリチュース (Lituus) 螺線，$k = -1$ のときは双曲螺線という．双曲螺線は $y = a$ を漸近線にもつ．


アルキメデス螺線


放物螺線


リチュース螺線


双曲螺線

対数螺線
$y = e^\theta \ (0 \leq \theta \leq \pi)$
$\theta$ が大きくなると原点から急速に離れる.

**例 1.1.15（対数螺線）** $r = a^{b\theta}$ の形に書ける螺線．アンモナイトや巻貝の形である．渦巻銀河はしばしばこの形をしている．原点を通る直線と，接線の角度が一定 ($\phi$) である螺線でもある．$\phi$ を使った表示式は $r = e^{\theta \cot \phi}$ となる．

## 1.1 節の演習

**演習 1.1.1** サイクロイド（例 1.1.6）を方程式 $y = y(x)$ で表すとき，$y'^2 = \frac{2r}{y} - 1$ を満たすことを示せ．

**演習 1.1.2** 次の多項式の零点集合は星芒形（例 1.1.11）であることを示せ．

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$$

---

キメデスの渦巻とはいわず，対数螺線，アルキメデスの螺線というのが慣用である．英語では渦巻状の平面曲線は spiral，空間曲線は helix という．対数螺線は logarithmic spiral である．

## 1.2 弧長変数

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ に対し，その内積 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$（または $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$）を次で定める．

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = (a_1, b_1),\ \boldsymbol{v}_2 = (a_2, b_2)$$

内積の性質として，次の双線形性と正値性に注意しておく．

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ で $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ なるのは $\boldsymbol{v} = 0$ なるときに限る．　(1.2.2)

$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$, $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$ である．

### 1.2.1 弧長の定義

連続曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ に対し，その**弧長** (arc length) を定義しよう．

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

なる数列の集合 $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ を区間 $[a, b]$ の**分割**といい，$\Delta$ で表す．

$$L(\gamma,\, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}),\, \gamma(t_i))$$

とおく．$\Delta'$ が $\Delta$ の細分のとき，3 角不等式より

$$L(\gamma,\, \Delta) \leq L(\gamma,\, \Delta')$$

である．$S(\gamma)$ を近似和 $L(\gamma,\, \Delta)$ 全体のなす集合とする．$S(\gamma)$ が上に有界のとき，$\gamma$ は長さをもつといい，

$$L(\gamma) = \sup S(\gamma)$$

を，曲線 $\gamma$ の**長さ**（**弧長**）という．

曲線 $\gamma(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が長さをもてば $\gamma$ を $[a, t]$ に制限して得られる曲線も長さをもつ．その長さを $s(t)$ とする．

**定理 1.2.1** $C^0$ 曲線 $\gamma(t)$ $(a \le t \le b)$ が $(a,b)$ で $C^1$ ならば $\gamma$ は長さをもち,

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|$$

が成り立つ.

**証明** $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ と書く. 区間 $[t, t+h]$ での $|\gamma_i'|$ の最大値を $M_i(t,h)$, 最小値を $m_i(t,h)$ とおく.

$$t = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t+h$$

なる分割をとると, 平均値の定理より

$$\gamma_i(s_j) - \gamma_i(s_{j-1}) = \gamma_i'(s_{j-1} + \theta_{i,j}(s_j - s_{j-1}))(s_j - s_{j-1}) \qquad (0 < \theta_{i,j} < 1)$$

なので

$$m_i(t,h)^2(s_j - s_{j-1})^2 \le (\gamma_i(s_j) - \gamma_i(s_{j-1}))^2 \le M_i(t,h)^2(s_j - s_{j-1})^2$$

となり,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} m_i(t,h)^2}\,(s_j - s_{j-1}) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\gamma_i(s_j) - \gamma_i(s_{j-1}))^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2} M_i(t,h)^2}\,(s_j - s_{j-1})$$

を得る. $j = 1, \cdots, n$ に関する和をとると,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} m_i(t,h)^2}\,h \le \sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\gamma_i(s_j) - \gamma_i(s_{j-1}))^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2} M_i(t,h)^2}\,h$$

となり, $[t, t+h]$ の細分をどんどん細かくした極限をとると,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} m_i(t,h)^2} \le \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2} M_i(t,h)^2}$$

を得る.

$\gamma$ は $(a,b)$ で $C^1$ なので $h \to 0$ のとき $M_i(t,h), m_i(t,h) \to \gamma_i'(t)$ となり, 主張を得る. □

よって，$C^1$ 曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ の弧長 $l$ は，次で与えられる．

$$l = L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ を曲線の**線素**という．

**例 1.2.2**　サイクロイド $x = a(\theta-\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ の弧長を求めよ．$\dot{x} = a(1-\cos\theta)$, $\dot{y} = a\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}\left[\frac{ds}{d\theta}\right]^2 &= \left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2+\left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2 = a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta \\ &= 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

なので，求める弧長は

$$\int_0^{2\pi}\frac{ds}{d\theta}\,d\theta = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\Big[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = 8a$$

**例 1.2.3**　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>b>0)$ の弧長 $l$ は，径数表示 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ を用いると，

$$\begin{aligned}l &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}d\theta \\ &= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}d\theta, \qquad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\end{aligned}$$

この積分は楕円積分と呼ばれ，初等関数で表せないことが知られている．

弧長を曲線の径数にとることができる．以下でそれを説明する．

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|du$$

とおくと，$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$ となる．よって，逆写像定理より，$t$ を $s$ の関数と見ることができる．$t = t(s)$ と書くと，曲線 $\gamma(t)$ を $s$ を径数として $\gamma(t(s))$ のように表すことができる．このように表したとき，$s$ を**弧長変数**という．弧

長変数 $s$ による微分を $'$ で表す習慣[3]がある．時間 $t$ に関する微分を $^{\bullet}$ で表す．$|\gamma'| = 1$ となるのは明らかであろう．

径数付けを変えても，弧長を表す積分は変わらない．実際，曲線 $\gamma(t)$ $(a \le t \le b)$ を径数の変換 $t = t(u)$ $(a = t(\alpha),\ b = t(\beta))$ で移すと，$dt/du > 0$ であるから，$\frac{d\gamma}{du} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{du}$ を用いて，

$$\int_a^b \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \frac{dt}{du} du = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\gamma}{du}\right| du$$

が得られる．

**定理 1.2.4** 曲線が極座標を用いて $C^1$ 関数 $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ で与えられているとき，その弧の長さは

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$$

で与えられる．

**証明** 曲線を次のように径数表示する．

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

このとき $dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta$, $dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta$ なので

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{(dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta)^2} \\ &= \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \end{aligned}$$

となり，結果を得る． □

**例 1.2.5** 対数螺線 $r = a^\theta$ $(\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$ の弧長 $s$ を求めてみよう．

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + r'^2 = a^{2\theta} + a^{2\theta}(\log a)^2 = a^{2\theta}(1 + (\log a)^2)$$

より，

[3] 実際の計算の場面では，他の変数による微分を $'$ で表すこともあるので，$'$ が何を表すか一々明記したほうが安全である．弧長による微分を $'$ で表すときは，必要に応じて「(習慣に従って) 弧長 $s$ による微分を $'$ で表す」と断ることにする．

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a^\theta \sqrt{1+(\log a)^2} d\theta = \frac{\sqrt{1+(\log a)^2}}{\log a} [a^\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+(\log a)^2}}{\log a} [a^{\theta_2} - a^{\theta_1}] = \frac{\sqrt{1+(\log a)^2}}{\log a} (r_2 - r_1)$$

よって，弧の長さは端点の動径の長さの差に比例することがわかる．

### 1.2.2　弧長の性質

曲線の端点間の距離は弧長を超えることはない．以下でそれを証明してみよう．

**定理 1.2.6**　曲線 $\gamma(t)$ $(a \leq t \leq b)$ に対し，次が成り立つ．

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

**証明**　$u = \dfrac{\gamma(b) - \gamma(a)}{|\gamma(b) - \gamma(a)|}$ とおく．

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = \langle \gamma(b) - \gamma(a), u \rangle = \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), u \rangle dt \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \qquad \square$$

曲線の弧長を知るには，曲線のすべての方向への射影の長さを知ればよい．CT スキャンの原理の最も簡単な場合である．

**定理 1.2.7（コーシー (Cauchy) の積分公式）**　長さ有限な曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ に対し

$$\gamma_\theta(t) = \langle \gamma(t), u \rangle u, \qquad u = (\cos\theta, \sin\theta)$$

とおくと，次が成り立つ．

$$\int_0^{2\pi} L(\gamma_\theta) d\theta = 4L(\gamma)$$

**証明**　まず，線分についてこの式を示す．長さ $L$ の線分から角度 $\theta$ をなす方向への射影の長さは $L|\cos\theta|$ なので

$$\int_0^{2\pi} L|\cos\theta| d\theta = 4L$$

となる．後は弧長の定義に戻れば，一般の曲線についても成立する．実際，

$$\int_0^{2\pi} L(\gamma_\theta, \Delta)d\theta = 4L(\gamma, \Delta)$$

であり，$\gamma$ が長さ有限なので $\gamma_\theta$ も長さ有限であるから，

$$\sup\left\{\int_0^{2\pi} L(\gamma_\theta, \Delta)d\theta : \Delta\right\} = 4\sup\{L(\gamma, \Delta) : \Delta\}$$

なので，与式を得る． □

$\gamma$ が閉曲線のとき，$L(\gamma_\theta)$ は $\gamma_\theta$ の像の線分としての長さの 2 倍である．このとき次のようにおく．

$$w_{\min} = \frac{1}{2}\min\{L(\gamma_\theta)\}, \qquad w_{\max} = \frac{1}{2}\max\{L(\gamma_\theta)\}$$

**定理 1.2.8** 閉曲線 $\gamma(t)$ に対して，$\pi w_{\min} \leq L(\gamma) \leq \pi w_{\max}$ が成り立つ．

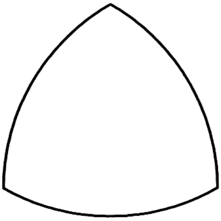
**証明** $w_{\min} \leq \frac{1}{2}L(\gamma_\theta) \leq w_{\max}$ を区間 $[0, 2\pi]$ で積分して次を得る．

$$2\pi w_{\min} \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} L(\gamma_\theta)d\theta \leq 2\pi w_{\max}$$

定理 1.2.7 より，主張を得る． □

この定理の不等式で等号が 1 つでも成り立てば $L(\gamma_\theta)$ は定数である．このような閉曲線を**定幅曲線**という．各辺の長さが 1 の正 3 角形の各頂点を中心とする円の円弧の一部（角度 $\pi/3$）を使って残り 2 頂点間に曲線を引く．

こうして得られる図形を**ルーロー** (Reuleaux) **の 3 角形**という．これは定幅曲線である．ルーローの 3 角形は，幅を固定したとき，定幅曲線で最も小さい面積をもつものとして特徴付けられる．ルーローの 3 角形の平行曲線（例 1.3.8 参照）を考えれば滑らかな定幅曲線の例が得られる．正多角形からも同様の構成ができるが省略する．



ルーローの 3 角形

**1.2 節の演習**

**演習 1.2.1** 次の曲線の弧長を求めよ．

(1) 放物線 $t \mapsto (t, t^2)$ $(0 \leq t \leq a)$

(2) 懸垂線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(0 \leq x \leq a)$

(3) カスプ $t \mapsto (t^2, t^3)$ $(0 \leq t \leq a)$

(4) 指数関数のグラフ $y = e^x$ $(0 \leq x \leq a)$

(5) シッソイド $t \mapsto (t^2, t^3)/(1 + t^2)$ $(0 \leq t \leq a)$

**演習 1.2.2**　次の曲線の弧長を求めよ．$r = a(1 + \cos\theta)$; $r = a\theta$ $(0 \leq \theta \leq 1)$.

## 1.3 曲　率

### 1.3.1 曲率の定義と基本事項

$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \neq 0$ を満たす曲線上の点を**正則**点という．曲線 $\gamma(t)$ の正則点で**単位接ベクトル** (unit tangent vector) $\boldsymbol{e}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{e} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}\frac{d\gamma}{dt}$$

$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = 1$ なので，この式を $s$ で微分すると，

$$2\left\langle \frac{d\boldsymbol{e}}{ds}, \boldsymbol{e} \right\rangle = 0$$

を得る．これは $\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}$ は 0 でなければ $\boldsymbol{e}$ と直交していることを表している．$\boldsymbol{n}$ を $\gamma(t)$ での $\gamma$ の**単位法ベクトル** (unit normal vector) とすると，

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right)$$

と書ける．(注意: $\boldsymbol{n}$ の選び方は $\boldsymbol{n}$, $-\boldsymbol{n}$ の 2 通りある．ここでは

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 > 0$$

なるように $\boldsymbol{n}$ を選んでいる.)

$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}$ は $\boldsymbol{e}$ に直交するので，

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$$

を満たす実数 $\kappa$ が存在する．この $\kappa$ を，正則点 $\gamma(t)$ での曲線 $\gamma$ の**曲率** (curvature) という．

ベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}$ の組を曲線 $\gamma$ の**フレネ枠** (Frenet frame) という．

**例 1.3.1**　サイクロイド $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$，単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$，曲率 $\kappa$ を求めてみよう．

$\frac{d}{dt}\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t) = 2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$ より，$s$ を弧長変数とすると $\frac{ds}{dt} = 2\sin\frac{t}{2}$ であり，

$$\boldsymbol{e} = \left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right), \qquad \boldsymbol{n} = \left(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right)$$

がわかる．$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}$ を

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \frac{1}{ds/dt}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}\boldsymbol{n}$$

と比較すると，$\kappa = -\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}$ がわかる．

**例 1.3.2**　エピサイクロイド

$$t \mapsto r(k+1)\left(\cos t - \frac{\cos(k+1)t}{k+1},\ \sin t - \frac{\sin(k+1)t}{k+1}\right)$$

についても，$\dot{\gamma}(t) = 2r(k+1)\sin\frac{kt}{2}\left(-\cos\frac{(k+2)t}{2}, \sin\frac{(k+2)t}{2}\right)$ なので，弧長変数 $s$ は $\frac{ds}{dt} = 2r(k+1)\sin\frac{kt}{2}$ を満たし，

$$\boldsymbol{e} = \left(-\cos\frac{(k+2)t}{2}, \sin\frac{(k+2)t}{2}\right), \qquad \boldsymbol{n} = -\left(\sin\frac{(k+2)t}{2}, \cos\frac{(k+2)t}{2}\right)$$

となる．

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \frac{1}{ds/dt}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = -\frac{k+2}{4r(k+1)\sin\frac{kt}{2}}\boldsymbol{n}$$

であるから $\kappa = -\frac{k+2}{4r(k+1)\sin\frac{kt}{2}}$ がわかる．

**例 1.3.3**　ハイポサイクロイド

$$t \mapsto r(k-1)\left(\cos t + \frac{\cos(k-1)t}{k-1},\ \sin t - \frac{\sin(k-1)t}{k-1}\right)$$

についても，$\dot{\gamma}(t) = 2r(k-1)\sin\frac{kt}{2}\left(-\cos\frac{(k-2)t}{2}, \sin\frac{(k-2)t}{2}\right)$ なので，弧長変数 $s$ は $\frac{ds}{dt} = 2r(k-1)\sin\frac{kt}{2}$ を満たし，

$$\boldsymbol{e} = \left(-\cos\frac{(k-2)t}{2}, \sin\frac{(k-2)t}{2}\right), \qquad \boldsymbol{n} = -\left(\sin\frac{(k-2)t}{2}, \cos\frac{(k-2)t}{2}\right)$$

となる.

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \frac{1}{ds/dt}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = -\frac{k-2}{4r(k-1)\sin\frac{kt}{2}}\boldsymbol{n}$$

であるから $\kappa = -\frac{k-2}{4r(k-1)\sin\frac{kt}{2}}$ がわかる.

**定理 1.3.4（曲率の幾何学的意味）** 曲線の接ベクトル $\boldsymbol{e}$ が $x$ 軸となす角を $\theta$ とすると,

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

**証明** $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\boldsymbol{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ なので,

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d\boldsymbol{e}}{d\theta} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta, \cos\theta) = \frac{d\theta}{ds}\boldsymbol{n} \qquad \square$$

$\kappa = 0$ となる点をその曲線の**変曲点** (inflexion)，$\kappa' = 0$ となる点をその曲線の**頂点** (vertex) という．ただし $'$ で弧長変数 $s$ による微分を表している.

**定理 1.3.5（フレネの公式）**

$$\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}$$

**証明** $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ は既出. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$ より $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n} = 0$ $\boldsymbol{n}' = a\boldsymbol{e}$ と書くと, $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ より $\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}' = 0$. 書き換えて $\kappa + a = 0$. よって $a = -\kappa$. $\square$

曲率の意味を理解するために, $s$ を弧長変数として $s = 0$ での $\gamma(s)$ のテイラー展開を見てみよう.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{1}{2}\gamma''(0)s^2 + \cdots$$

$\gamma' = \boldsymbol{e}$, $\gamma'' = \kappa\boldsymbol{n}$ より,

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \boldsymbol{e}(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)\boldsymbol{n}(0)s^2 + \cdots$$

簡単のため $\gamma(0) = (0,0)$, $\boldsymbol{e}(0) = (1,0)$, $\boldsymbol{n}(0) = (0,1)$ とすると,

$$\gamma(s) = (s + o(s^2), \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + o(s^2))$$

となる．$\gamma(s)$ の第 1 成分を $x$ 第 2 成分を $y$ とすると，曲線はグラフ $y = f(x)$ として表すことができ，$f(x)$ には 1 次の項はない．特に

$$y = \frac{1}{2}\kappa(0)x^2 + (3\text{ 次以上の項}) \tag{1.3.1}$$

弧長変数は簡単に求められないことが多いので，曲率を計算するには一般の径数による表示が必要になる．

**定理 1.3.6（曲率の径数表示）**

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \det(\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma})$$

**証明**　$\dot{\gamma}(t) = \frac{ds}{dt}\gamma' = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e} = |\dot{\gamma}(t)|\boldsymbol{e}$ より，

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot{\gamma}(t)|\dot{\boldsymbol{e}} = \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot{\gamma}(t)|\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}' \\ &= \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot{\gamma}(t)|^2\kappa\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

なので

$$\kappa = \frac{\langle\ddot{\gamma}(t), \boldsymbol{n}\rangle}{|\dot{\gamma}(t)|^2} = \frac{\langle(\ddot{x}, \ddot{y}), (-\dot{y}, \dot{x})\rangle}{|\dot{\gamma}(t)|^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$ □

**例 1.3.7**　楕円 $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ の曲率を求めてみよう．

$$\dot{\gamma}(t) = (-a\sin t, b\cos t), \qquad \ddot{\gamma}(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$$

より，

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

**例 1.3.8（平行曲線）**　弧長 $s$ を変数とする平面曲線 $\gamma(s)$ を考える．$d$ を定数として，$\delta(s) = \gamma(s) + d\boldsymbol{n}$ で表される曲線を，元の曲線 $\gamma(s)$ の**平行曲線** (parallel curve) という．平行曲線 $\delta(s)$ は $d\kappa = 1$ のとき特異点をもつ．なぜなら

$$\delta'(s) = \gamma'(s) + d\boldsymbol{n}' = \gamma'(s) - d\kappa\boldsymbol{e} = (1 - d\kappa)\boldsymbol{e}$$

となるからである．平行曲線 $\delta(s)$ の単位接ベクトルは $\boldsymbol{e}$, 単位法ベクトルは $\boldsymbol{n}$ であることもわかる．よって $\delta(s)$ の曲率 $\kappa_\delta$ は次式で与えられる．

$$\kappa_\delta = \frac{\langle \delta''(s), \boldsymbol{n}\rangle}{|\delta'(s)|^2} = \frac{\langle ((1-d\kappa)\boldsymbol{e})', \boldsymbol{n}\rangle}{(1-d\kappa)^2} = \frac{\langle (1-d\kappa)\boldsymbol{e}', \boldsymbol{n}\rangle}{(1-d\kappa)^2} = \frac{\kappa}{1-d\kappa}$$

**定理 1.3.9（曲率の極座標表示）** 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて曲線が $r = f(\theta)$ で与えられたとき，その曲率 $\kappa$ は次で与えられる．

$$\kappa = \frac{f^2 + 2f'^2 - ff''}{(f^2 + f'^2)^{3/2}}$$

**証明** 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて曲線が $r = f(\theta)$ で与えられたとき，次のような曲線の径数表示が得られる．

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}
x' &= -f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta \\
y' &= f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta \\
x'' &= -f(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta + f''(\theta)\cos\theta \\
y'' &= -f(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta + f''(\theta)\sin\theta
\end{aligned}$$

を得る．$x'^2 + y'^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$ なので，曲率の径数表示の公式に代入すれば結果を得る．　□

**定理 1.3.10（陰関数による曲率の表示）** 曲線 $C$ が $f(x, y) = 0$ で与えられたとき，その曲率 $\kappa$ は次で与えられる．

$$\kappa = -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}$$

**証明** 単位法ベクトル $N$ と単位接ベクトル $T$ は次で与えられる．

$$N = \frac{(f_x, f_y)}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}, \qquad T = \frac{(f_y, -f_x)}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}$$

よって，弧長変数 $s$ による $f(x,y) = 0$ の径数表示 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ をとれば，$(x'(s), y'(s)) = \gamma'(s) = T = \frac{(f_y, -f_x)}{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}}$ である．

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(f_{xy}, -f_{xx})}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} - (f_y, -f_x)\frac{(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})(f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}}}{f_x^2 + f_y^2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{(f_{yy}, -f_{xy})}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} - (f_y, -f_x)\frac{(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})(f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}}}{f_x^2 + f_y^2}$$

より

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, N \right\rangle = \frac{f_x f_{xy} - f_y f_{xx}}{f_x^2 + f_y^2}, \qquad \left\langle \frac{\partial T}{\partial y}, N \right\rangle = \frac{f_x f_{yy} - f_y f_{xy}}{f_x^2 + f_y^2}$$

を得る．よって曲率 $\kappa$ は次のように表される．

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle = \left\langle \frac{dx}{ds}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial T}{\partial y}, N \right\rangle \\
&= x'(s)\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, N \right\rangle + y'(s)\left\langle \frac{\partial T}{\partial y}, N \right\rangle \\
&= \frac{f_y}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{f_x f_{xy} - f_y f_{xx}}{f_x^2 + f_y^2} - \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{f_x f_{yy} - f_y f_{xy}}{f_x^2 + f_y^2} \\
&= -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

□

### 1.3.2 接　触

径数表示された曲線 $\gamma(t)$ と陰関数で定義された曲線 $f(x,y) = 0$ に対し合成関数 $f \circ \gamma(t)$ を考える．これは2つの曲線の接触を測っていると考えられるので接触関数と呼ぶ．

$$f \circ \gamma(t) = c_k (t - t_0)^k + c_{k+1}(t - t_0)^{k+1} + c_{k+2}(t - t_0)^{k+2} + \cdots$$

のとき $f(x,y) = 0$ で定まる曲線と，曲線 $\gamma(t)$ は $t = t_0$ で，少なくとも $\boldsymbol{k-1}$ **位の接触**をするという．特に $c_k \neq 0$ のときは $k-1$ 位の接触[4]をする（または

[4] 1 位の接触が普通の接触である．2 つの曲線を式 (1.3.1) の形に表したとき $k$ 次までの係数が同じならば，少なくとも $k$ 位の接触をする．

**$k$ 点接触**[5]をする）という．ここでは説明しないが，$k$ 位の接触をするという概念は，径数表示や座標に依存しない概念である．

**■ 直線との接触**　$f(x,y) = \langle \boldsymbol{u}, (x,y)\rangle - c = ux + vy - c$ とおく．$|\boldsymbol{u}| = 1$ とする．$f(x,y) = 0$ は単位ベクトル $\boldsymbol{u} = (u,v)$ に直交する直線の方程式である．弧長変数で径数表示された曲線 $\gamma(s)$ に対し

$$f\circ\gamma(s) = \langle \boldsymbol{u}, \gamma\rangle - c$$

を順次微分していって，$\gamma(s)$ に $k$ 位の接触をする直線の条件を調べてみよう．

$$(f\circ\gamma)' = \langle \boldsymbol{u}, \gamma'\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}\rangle$$
$$(f\circ\gamma)'' = \langle \boldsymbol{u}, \gamma''\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \kappa\boldsymbol{n}\rangle$$
$$(f\circ\gamma)''' = \langle \boldsymbol{u}, \gamma'''\rangle = \langle \boldsymbol{u}, (\kappa\boldsymbol{n})'\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \kappa'\boldsymbol{n} + \kappa\boldsymbol{n}'\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e}\rangle$$

なので，次を得る．

- $(f\circ\gamma)'(t_0) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}$
- $(f\circ\gamma)'(t_0) = (f\circ\gamma)''(t_0) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n},\ \kappa = 0$
- $(f\circ\gamma)'(t_0) = (f\circ\gamma)''(t_0) = (f\circ\gamma)'''(t_0) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n},\ \kappa = 0,\ \kappa' = 0$

よって，次がわかった．

- 少なくとも 1 位の接触をする直線は常に存在し，その法方向は $\boldsymbol{n}$.
- 少なくとも 2 位の接触をする直線が存在するための必要十分条件は，その点が変曲点である．
- 少なくとも 3 位の接触をする直線が存在するための必要十分条件は，その点が変曲点かつ頂点である．

**■ 円との接触**　$f(x,y) = 0$ を点 $\boldsymbol{u} = (u,v)$ を中心とする半径 $r$ の円の方程式とする．すなわち

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}(\langle \boldsymbol{u} - (x,y), \boldsymbol{u} - (x,y)\rangle - r^2) \\ &= \frac{1}{2}\left((x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

とおく．弧長変数で径数表示された曲線 $\gamma(s)$ に対し

[5] 2 つの曲線の $k$ 個の共有点が 1 点に集まった接触という意味である．

$$f\circ\gamma(s) = \frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{u} - \gamma(s), \boldsymbol{u} - \gamma(s)\rangle - r^2\right)$$

を順次微分していって，$\gamma(s)$ に $k$ 位の接触をする円の条件を調べてみよう．

$$\begin{aligned}
(f\circ\gamma)' &= -\langle \gamma', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle = -\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{u} - \gamma\rangle \\
(f\circ\gamma)'' &= -\langle \gamma'', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + |\gamma'|^2 = -\langle \kappa\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + 1 \\
(f\circ\gamma)''' &= -\langle \gamma''', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + \langle \gamma', \gamma''\rangle = -\langle (\kappa\boldsymbol{n})', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + \langle \boldsymbol{e}, \kappa\boldsymbol{n}\rangle \\
&= -\langle \kappa'\boldsymbol{n} + \kappa\boldsymbol{n}', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle = -\langle \kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u} - \gamma\rangle \\
(f\circ\gamma)'''' &= -\langle (\kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e})', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle - \langle \kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e}, \gamma'\rangle \\
&= -\langle \kappa''\boldsymbol{n} + \kappa\boldsymbol{n}' - 2\kappa\kappa'\boldsymbol{e} - \kappa^2\boldsymbol{e}', \boldsymbol{u} - \gamma\rangle - \langle \kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle \\
&= -\langle \kappa''\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e} - 2\kappa\kappa'\boldsymbol{e} - \kappa^3\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + \kappa^2 \\
&= -\langle (\kappa'' - \kappa^3)\boldsymbol{n} - (\kappa^2 - 2\kappa\kappa')\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{u} - \gamma\rangle + \kappa^2
\end{aligned}$$

となるので，次がわかる．

- $(f\circ\gamma)'(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \exists\rho\ \boldsymbol{u} - \gamma = \rho\boldsymbol{n}$
- $(f\circ\gamma)'(t_0) = (f\circ\gamma)''(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} - \gamma = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$
- $(f\circ\gamma)'(t_0) = (f\circ\gamma)''(t_0) = (f\circ\gamma)'''(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} - \gamma = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n},\ \kappa' = 0$
- $(f\circ\gamma)'(t_0) = (f\circ\gamma)''(t_0) = (f\circ\gamma)'''(t_0) = (f\circ\gamma)^{(4)}(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} - \gamma = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n},\ \kappa' = 0,\ \kappa'' = 0$

よって，次がわかった．

- 円が少なくとも 1 位の接触をする必要十分条件は，その円の中心が接点での曲線の法線上にある．
- 円が少なくとも 2 位の接触をする必要十分条件は，その円の中心 $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u} = \gamma + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$ となる．
- その円が少なくとも 3 位の接触をするための必要十分条件は，その点が頂点 ($\kappa' = 0$) である．
- その円がさらに少なくとも 4 位の接触をするための必要十分条件は，その点が $\kappa' = \kappa'' = 0$ を満たす．

$\kappa \neq 0$ のとき，$\gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\boldsymbol{n}(s_0)$ を中心する半径 $1/\kappa(s_0)$ の円は，点 $\gamma(s_0)$ で少なくとも 2 位の接触をする（唯一の）円である．この円を**曲率円** (circle

of curvature)，$1/\kappa$ を**曲率半径** (radius of curvature)，$\gamma + (1/\kappa)\boldsymbol{n}$ を**曲率中心** (center of curvature) という．

### 1.3.3　曲線論の基本定理

曲率は平面曲線を特徴付ける．これを主張するのが次の平面曲線の基本定理である．

**定理 1.3.11（平面曲線の基本定理）**　区間 $[0,l]$ で定義された $C^\infty$ 関数 $\kappa(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ に対し，$s$ を弧長変数とし，$\kappa(s)$ を曲率とする平面曲線 $\gamma(s)$ が存在する．さらに，このような平面曲線は，回転と平行移動で移り合うものを除いてただ1つである．

**証明**　まず存在を示す．$\theta(t) = \int_0^t \kappa(u)du$ として，

$$\gamma(s) = \int_0^s (\cos\theta(t),\ \sin\theta(t))dt$$

とおくと，

$$\gamma'(s) = (\cos\theta(s),\ \sin\theta(s))$$

となる．$|\gamma'| = 1$, $\boldsymbol{e} = \gamma'$, $\boldsymbol{n} = (-\sin\theta(s),\ \cos\theta(s))$ に注意する．

$$\gamma''(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s),\ \cos\theta(s)) = \kappa(s)(-\sin\theta(s),\ \cos\theta(s)) = \kappa\boldsymbol{n}$$

となり，$\kappa$ が曲率であることがわかる．

一意性の証明をしよう．2つの曲線 $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ が同じ曲率 $\kappa(s)$ をもつとしよう．これらの曲線は回転と平行移動によって，出発点 $(s=0)$ と出発点での接ベクトルが一致するようにできる．すると，

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0), \quad \boldsymbol{n}_1(0) = \boldsymbol{n}_2(0)$$

が成り立つ．この条件下で2つの曲線が一致することを示す．

$$A_i = (\gamma_i'(s)\ \boldsymbol{n}_i(s)) \qquad (i = 1, 2)$$

とおく．${}^tA_iA_i = I$ で

$$A_i' = (\gamma_i'' \ \boldsymbol{n}_i') = (\kappa \boldsymbol{n}_i \ \ -\kappa \boldsymbol{e}_i) = A_i K, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}(A_1{}^tA_2)' &= A_1'{}^tA_2 + A_1{}^tA_2' = A_1K\,{}^tA_2 + A_1{}^t(A_2K) \\ &= A_1K\,{}^tA_2 + A_1{}^tK\,{}^tA_2 = A_1(K + {}^tK)\,{}^tA_2 = 0\end{aligned}$$

であり，$A_1{}^tA_2$ は $s$ に依存しない定数行列であることがわかる．$A_2(s)^{-1} = {}^tA_2(s)$, $A_1(0) = A_2(0)$ に注意すると，

$$A_1(s)A_2(s)^{-1} = A_1(s)\,{}^tA_2(s) = A_1(0)\,{}^tA_2(0) = A_1(0)A_2(0)^{-1} = I$$

よって $A_1(s) = A_2(s)$ となり，$\gamma_1'(s) = \gamma_2'(s)$ がわかった．$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ なので，積分することにより $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ がわかる． □

**1.3 節の演習**

**演習 1.3.1** 例 1.3.2 に倣って，ハイポサイクロイド（例 1.1.10）の曲率を計算せよ．

**演習 1.3.2** レムニスケート $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ を極座標表示すると $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ となり，曲率は $3r/2a^2$ であることを示せ．

**演習 1.3.3** 曲線 $t \mapsto (t, \frac{1}{2}a_2t^2 + \frac{a_3}{6}t^3 + o(t^3))$ に対し $a_2 = \kappa(0)$, $a_3 = \kappa'(0)$ を示せ．

**演習 1.3.4** 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の曲率を陰関数表示を用いて計算せよ．

**演習 1.3.5** 双曲線（例 1.1.2）の曲率を求めよ．

## 1.4 伸開線と縮閉線

弧長 $s$ を変数とする平面曲線 $\gamma(s)$ を考える．$\varepsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$ で表される曲線を，元の曲線 $\gamma(s)$ の**縮閉線** (evolute)，$\gamma(s)$ を $\varepsilon(s)$ の**伸開線** (involute) という．縮閉線は伸開線の曲率中心の軌跡である．

$$\varepsilon'(s) = \gamma'(s) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{n} + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{e} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{n} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{e}) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{n}$$

なので，縮閉線の接線方向は伸開線の法線方向である．縮閉線 $\varepsilon$ のフレネ枠を $\bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{n}$, $\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}$ とする[6]．また，$\rho = \frac{1}{\kappa}$ が縮閉線 $\varepsilon(s)$ の弧長変数となる．なぜなら，

$$\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{\varepsilon'(s)}{\rho'} = \frac{\operatorname{sign}(1/\kappa')\rho'\boldsymbol{n}}{\rho'} = \bar{\boldsymbol{e}}$$

となるからである．次式より縮閉線のフレネ枠 $\bar{\boldsymbol{e}}$, $\bar{\boldsymbol{n}}$ に関する曲率は $-\kappa^3/\kappa'$ で与えられることもわかる．

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{e}}}{d\rho} = \frac{d\boldsymbol{n}/ds}{d\rho/ds} = \frac{-\kappa\boldsymbol{e}}{d\rho/ds} = \frac{\kappa}{\frac{d}{ds}(1/\kappa)}(-\boldsymbol{e}) = \frac{\kappa}{-\kappa'/\kappa^2}(-\boldsymbol{e}) = -\frac{\kappa^3}{\kappa'}\bar{\boldsymbol{n}}$$

**例 1.4.1**　放物線 $4py = x^2$（$p$ は正の定数）の曲率 $\kappa$ は，径数表示 $(x, y) = (t, \frac{t^2}{4p})$ を用いると，$\kappa = \frac{4}{p}\left(4 + \frac{t^2}{p^2}\right)^{-3/2}$ となる．縮閉線の軌跡は次で表せる．

$$(x, y) = \left(-\frac{t^3}{4p^2}, 2p + \frac{3t^2}{4p}\right)$$

これから $t$ を消去して，$27px^2 = 4(y - 2p)^3$ を得る．(次頁図左)

**例 1.4.2**　サイクロイド $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$（$a$ は正の定数）の曲率は $\kappa = -\frac{1}{2a\sqrt{2 - 2\cos t}} = -\frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}$ である．縮閉線の軌跡は

$$\begin{aligned}\gamma + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} &= a(t - \sin t, 1 - \cos t) - 4a\sin\frac{t}{2}\left(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right)\\ &= a(t + \sin t, \cos t - 1)\end{aligned}$$

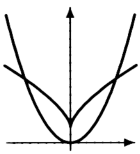
となり，元のサイクロイドと合同なサイクロイドである．(次頁図中)

**例 1.4.3**　楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$（$a$, $b$ は正の定数）の曲率は径数表示 $(a\cos t, b\sin t)$ を用いて $\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$ となる．縮閉線の軌跡は

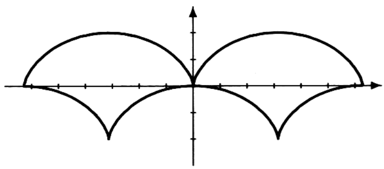
[6] $\bar{\boldsymbol{e}}$ は，$\kappa' > 0$ のときは曲線の進行方向であるが，$\kappa' < 0$ のときは曲線の進行方向と逆向きである．もし $\bar{\boldsymbol{e}}$ が常に進行方向であるようにフレネ枠を定めたければ $\bar{\boldsymbol{e}} = \operatorname{sign}(1/\kappa')\boldsymbol{n}$, $\bar{\boldsymbol{n}} = \operatorname{sign}(1/\kappa')\boldsymbol{e}$ とすればよいが，これは頂点では定義されない．ただこのように定めても後の計算は同様にできるので興味があればやってみればよい．

$$(x,y)=\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\right)$$

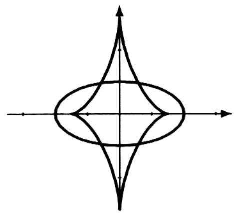
となり，これから $t$ を消去すると $(\frac{a}{a^2-b^2}x)^{2/3}+(\frac{b}{b^2-a^2}y)^{2/3}=1$.（下図右）



$p=1$ のとき



$a=1$ のとき



$a=2, b=1$ のとき

曲率が増加関数または減少関数のときは，次の定理が知られている．曲率が減少関数ならば，$s$ を $-s$ に換えれば増加関数となるので，$\kappa(s)$ が増加関数として述べておけば十分である．

**定理 1.4.4（クネーザー (Kneser)）** 曲率 $\kappa(s)$ が増加関数ならば，次の不等式が成り立つ．

$$s_0<s_1 \quad ならば \quad |\varepsilon(s_1)-\varepsilon(s_0)|+\rho(s_1)<\rho(s_0)$$

よって，$s=s_0$ での曲率円はその内部に $s=s_1$ での曲率円を含む．特に，この曲線は複接線をもたず，自己交点ももたない．

**証明** 曲率 $\kappa(s)$ が増加関数なので，$\rho(s)=1/\kappa(s)$ は減少関数であり，

$$\int_{s_0}^{s_1}|\varepsilon'(s)|ds=\int_{s_0}^{s_1}|\rho'(s)\boldsymbol{n}|ds=-\int_{s_0}^{s_1}\rho'(s)ds=\rho(s_0)-\rho(s_1)$$

を得る．曲率が増加関数なので，縮閉線は線分を含まず，

$$|\varepsilon(s_1)-\varepsilon(s_0)|<[\varepsilon(s_0)\text{ から }\varepsilon(s_1)\text{ までの縮閉線の長さ}]=\int_{s_0}^{s_1}|\varepsilon'(s)|ds$$

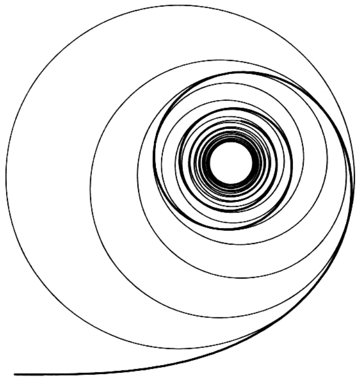
が成立し，求めたい不等式を得た．この不等式から $s=s_0$ での曲率円が $s=s_1$ での曲率円を含むことも従う．

$s=s_0,s_1$ $(s_0<s_1)$ で接する複接線があったとする．接線は接点で曲率円と接するので，複接線はこの点での 2 つの曲率円と接しなければならず，一

方の曲率円が他方を含むので矛盾．また，自己交点を $\gamma(s_0) = \gamma(s_1)$ とすると，3角不等式より

$$|\varepsilon(s_1) - \varepsilon(s_0)| + \rho(s_0) \geq \rho(s_1)$$

となり，定理の不等式に矛盾する． □



$\kappa = \pi s$ となる曲線の例とその曲率円たち

**系 1.4.5**　前定理の設定で，曲線の各曲率円上で定数になる $C^1$ 関数は定数に限る．

**証明**　各曲率円上で定数となる $C^1$ 関数 $f$ と，曲率円の径数表示 $\alpha(t)$ に対し

$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = df(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

曲線 $\gamma(s)$ に対し $\alpha(t_0) = \gamma(s_0)$ となる曲率円の径数表示 $\alpha(t)$ と $t_0$ をとる．$\alpha'(t_0)$ は $\gamma'(s_0)$ の定数倍なので，その定数を $c$ とすると，

$$\frac{d}{ds}f(\gamma(s))|_{s=s_0} = df(\gamma(s_0)) \cdot \gamma'(s_0) = df(\alpha(t_0)) \cdot c\alpha'(t_0) = 0$$

となり，$f$ は曲線上で定数であることがわかる．よって $f$ は考えている領域で定数でなければならない． □

### 1.4 節の演習

**演習 1.4.1** エピサイクロイド（例 1.1.8）の縮閉線を求めよ．

**演習 1.4.2** ハイポサイクロイド（例 1.1.10）の縮閉線を求めよ．

**演習 1.4.3** $s$ を弧長変数とする曲線 $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ $(s \mapsto \varepsilon(s))$ があるとき，その伸開線は $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ $(s \mapsto \varepsilon(s) - s\varepsilon'(s))$ で表されることを示せ．

**演習 1.4.4** 円 $t \mapsto a(\cos t, \sin t)$ の伸開線を求めよ．

**演習 1.4.5** 曲線 $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ $(t \mapsto \varepsilon(t))$ の伸開線を表す式を求めよ．

## 1.5 包 絡 線

曲線の 1 径数族があったとき，この曲線族のどの曲線にも接するような曲線をこの曲線族の**包絡線** (envelope) という．

**定理 1.5.1** $u$ をパラメータとする曲線族 $f(x, y, u) = 0$ を考える．関数 $f(x, y, u)$ が $C^2$ 級で，

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{ux} & f_{uy} \end{vmatrix} = 0$$

となるのは高々孤立点とする．このとき，連立方程式

$$f(x, y, u) = 0, \qquad f_u(x, y, u) = 0$$

の解は，孤立点でなければ，曲線族の包絡線か，または特異点の軌跡を表す．

**証明** $C^1$ 曲線 $(x(t), y(t), u(t))$ を

$$f(x(t), y(t), u(t)) \equiv 0$$

なるようにとると，これを $t$ で微分して

$$f_x(x, y, u)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y, u)\frac{dy}{dt} + f_u(x, y, u)\frac{du}{dt} \equiv 0$$

どんな小区間に制限しても $\frac{du}{dt} \neq 0$ と仮定する．

$$
\begin{aligned}
&f_u(x(t), y(t), u(t)) = 0 \\
&\iff \left\langle (f_x, f_y)(x(t), y(t)), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right\rangle = 0 \\
&\iff \begin{cases} (x(t), y(t)) \text{ は包絡線（すなわち } (f_x, f_y),\ (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) \text{ は } 0 \text{ でなく互いに直交）}, \\ (x(t), y(t)) \text{ は特異点の軌跡（すなわち } (f_x, f_y)(x(t), y(t)) \equiv 0), \\ (x(t), y(t)) \text{ は } 1 \text{ 点（すなわち } (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) \equiv 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ある小区間で $\frac{du}{dt} \equiv 0$ ならば $u(t) = u_0$ であり，曲線弧 $(x(t), y(t))$ は曲線 $f(x, y, u_0) = 0$ 内にある．よって $f(x(t), y(t), u_0) \equiv 0$．これを $t$ で微分して，

$$
f_x(x(t), y(t), u_0)x' + f_y(x(t), y(t), u_0)y' \equiv 0
$$

を得る．$f_u(x(t), y(t), u_0) \equiv 0$ と仮定すれば，

$$
f_{ux}(x(t), y(t), u_0)x' + f_{uy}(x(t), y(t), u_0)y' \equiv 0
$$

となる．$(x', y') \neq (0, 0)$ ならば，

$$
\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{ux} & f_{uy} \end{vmatrix} (x(t), y(t)) = 0
$$

となり，仮定に矛盾する．よって $(x', y') \not\equiv 0$ であるから $f_u(x(t), y(t), u_0) \not\equiv 0$ がわかる．　□

**例 1.5.2**　直線族 $x\cos\theta + y\sin\theta = f(\theta)$ を考える．これとこれを微分した

$$
-x\sin\theta + y\cos\theta = f'(\theta)
$$

を連立させて解くと，

$$
\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta, \\ y = f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta \end{cases}
$$

を得る．これが曲線を表せば，それは元の直線族の包絡線である．直線には特異点はないので特異点の軌跡はないことに注意しよう．

これより

$$\begin{cases} dx = -(f(\theta) + f''(\theta))\sin\theta\, d\theta, \\ dy = (f(\theta) + f''(\theta))\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

が得られ，包絡線の線素 $ds$ は次のようになる．

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |f(\theta) + f''(\theta)|d\theta$$

**定理 1.5.3** 曲線 $y = f(x)$ の法線族は縮閉線を包絡線にもつ．

**証明** 法線族は次の式で与えられる．

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

この式を $a$ で微分すると，

$$-f'(a) = \frac{f''(a)}{f'(a)^2}(x - a) + \frac{1}{f'(a)}$$

よって $x - a = -\frac{f'(a)}{f''(a)}(1 + f'(a)^2)$．したがって，包絡線の方程式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} &= (x - a)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{f'(a)} \end{pmatrix} = -\frac{f'(a)}{f''(a)}(1 + f'(a)^2)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{f'(a)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}\begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}{f''(a)}\boldsymbol{n} = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

となる．ただし $\boldsymbol{n}$ は曲線の単位法ベクトルで $\boldsymbol{n} = \frac{1}{(1+f'(a))^{1/2}}\begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって $(x, y)$ の軌跡は縮閉線である． □

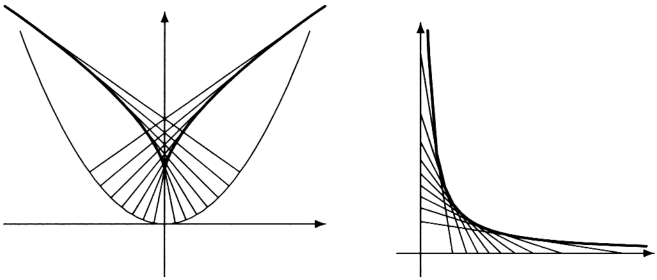
**例 1.5.4** 放物線 $y = x^2$ の法線群の包絡線を求めてみよう．法線群の方程式は

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

である．これを書き直すと，

$$2ay - 2a^3 + x - a = 0 \quad \text{なので，これを } a \text{ で微分すると} \quad 2y - 6a^2 - 1 = 0$$

この 2 式より $a$ を消去すると $2(2y - 1)^3 = 27x^2$．これが包絡線の方程式である．



**例 1.5.5**　直線が $x$ 軸および $y$ 軸から切り取る切片 $a$, $b$ の積が一定 $(k^2)$ となる直線群の包絡線を求めてみる．直線群の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (ab=k^2) \qquad \text{なので} \qquad \frac{x}{a}+\frac{ay}{k^2}=1$$

となり，$k^2x+a^2y-k^2a=0$．この左辺を $a$ で微分したものを 0 とおくと，$2ay-k^2=0$．これより $a=\frac{k^2}{2y}$ を得る．これを最初の式に代入して

$$\frac{2xy}{k^2}+\frac{1}{2}=1 \quad \text{整理して} \quad xy=\frac{k^2}{4}$$

**例 1.5.6**　直線が $x$ 軸および $y$ 軸から切り取る切片 $a$, $b$ の和が一定 $(2k)$ となる直線群の包絡線を求めてみよう．直線群の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a+b=2k) \qquad \text{なので} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{2k-a}=1$$

より $(2k-a)x+ay-a(2k-a)=0$．この左辺を $a$ で微分したものを 0 とおくと，$-x+y-2k+2a=0$ となる．これより $a=\frac{1}{2}(x-y)+k$ なので $2k-a=\frac{1}{2}(y-x)+k$ となり，これらを最初の式に代入すると，

$$\frac{2x}{x-y+2k}+\frac{2y}{y-x+2k}=1$$

を得る．分母を払うと

$$2x(y-x+2k)+2y(x-y+2k)=(x-y+2k)(y-x+2k)$$

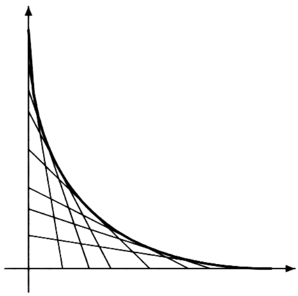
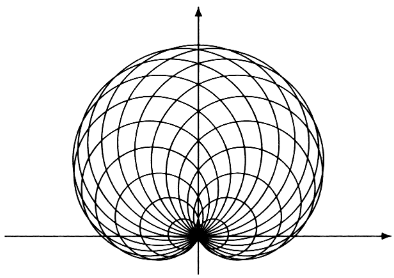
を得る．変形すると $-2(x-y)^2+4k(x+y)=4k^2-(x-y)^2$ なので，

$$4k(x+y)=4k^2+(x-y)^2 \qquad \text{となり} \qquad (x-y+2k)^2=8kx$$

したがって $x-y+2k=2\sqrt{2kx}$ であり $y=x-2\sqrt{2kx}+2k$ となり

$$y=(\sqrt{2k}-\sqrt{x})^2 \qquad \text{から} \qquad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2k}$$

を得る．これが包絡線の方程式である．

**例 1.5.7**　点 $P$ が円 $r=2a\sin\theta$ 上を動くとき，$OP$ を直径とする円群の包絡線を求めてみよう．極座標で表された 2 点 $(r,\theta)$, $(r_1,\alpha)$ の距離は

$$\sqrt{(r\cos\theta-r_1\cos\alpha)^2+(r\sin\theta-r_1\sin\alpha)^2}=\sqrt{r^2+{r_1}^2-2rr_1\cos(\theta-\alpha)}$$

であることに注意する．よって中心が極座標で $(r_1,\alpha)$，半径が $r_1=a\sin\alpha$ の円の族の方程式は

$${r_1}^2+r^2-2rr_1\cos(\theta-\alpha)={r_1}^2$$

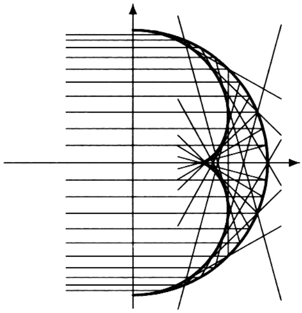
なので整理すると，

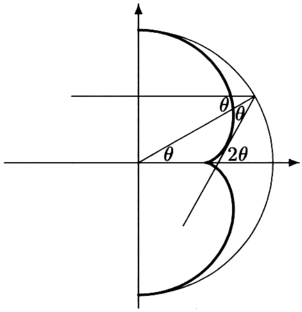
$$\begin{aligned} r-2r_1\cos(\theta-\alpha) &= r-2a\sin\alpha\cos(\theta-\alpha) \\ &= r-2a(\sin\theta+\sin(\theta-2\alpha))=0 \end{aligned}$$

となり，円群の方程式を得る．これを $\alpha$ で微分すると $2\cos(\theta-2\alpha)=0$．よって $\theta-2\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n\in\mathbb{Z})$．$\alpha=\frac{1}{2}(\theta-(2n+1)\frac{\pi}{2})$ を円群の方程式に代入して得られる心臓形 $r=a(1+\sin\theta)$ が包絡線である．

**例 1.5.8**　平行光線が半円の内側で反射するとき，反射光線の包絡線を求め

よ.






入射光線 $y = \sin\theta$ の反射光線の方程式は $y = \tan 2\theta(x - \cos\theta) + \sin\theta$. よって, $x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - \sin\theta = 0$. これを $\theta$ で微分したものを 0 とおくと,

$$x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

これらより $\theta$ を消去すると,

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta(3-2\cos^2\theta)}{2} = \frac{1}{4}(3\cos\theta - \cos 3\theta), \\ y = \sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \end{cases}$$

を得る. これが包絡線を表す.

## 1.5 節の演習

**演習 1.5.1**　曲線 $y = f(x)$ の接線の族 $y = f'(u)(x - u) + f(u)$ の包絡線を求めよ.

**演習 1.5.2**　円上の点 $P(\cos t, \sin t)$ と点 $A(a, 0)$ $(|a| \neq 1)$ の中点 $B$ を通り, 直線 $PA$ に直交する直線族の包絡線を求めよ.

**演習 1.5.3**　双曲線 $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ 上の点 $(x, y)$ を中心とし, 原点を通る円の族の包絡線を求めよ.

**演習 1.5.4**　原点と点 $(0, a)$ を結ぶ線分を直径とする円の円周上に中心のある円で, 原点を通る円たちの包絡線を求めよ.

**演習 1.5.5**　次の曲線族の包絡線を求めよ.

(1) $y = ax + \frac{1}{a}$ (2) $x^2 + (y-a)^2 = a$ (3) $y^2 = a(x-a)$
(4) $(y-a)^2 = x(x-1)^2$ (5) $y = \frac{3}{2}ax - \frac{a^3}{2}$

## 1.6 閉曲線

終点と始点が一致する曲線を**閉曲線** (closed curve) という．曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ が $C^r$ 閉曲線であるとは

$$\lim_{s \to 0+0} \gamma^{(n)}(s) = \lim_{s \to l-0} \gamma^{(n)}(s) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

が成り立つときをいう．$\gamma(s) = \gamma(s+l)$ と定めると，$\gamma(s)$ は $\mathbb{R}$ 上定義された，周期 $l$ の $C^r$ 関数と見なすことができる．$S^1$ を平面内の原点中心の半径 1 の円とし，閉曲線を $S^1$ からの写像 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ と見ることもある．

曲線 $\gamma(s)$ には**向き**を定めて議論することが多い．曲線の向きとは，曲線の進行方向のことで，曲線の径数付けが与えられれば，その接ベクトルが向きを与える．径数付け $s \mapsto \gamma(l-s)$ は $s \mapsto \gamma(s)$ とは逆の向きを与える．向きの与えられた曲線を**有向曲線**ということがある．平面曲線については，向きを逆にして単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ を変えなければ，曲率の符号は変わることに注意しよう．

自分自身と交差しない閉曲線を**単純閉曲線** (simple closed curve) という．ジョルダン (Jordan) の曲線定理によれば，平面の単純閉曲線は平面を内部と外部に分ける．単純閉曲線上の任意の 2 点を結ぶ線分が外部の点を含まないとき，その曲線を**卵形線** (oval) という．

### 1.6.1 4 頂点定理

**定理 1.6.1（卵形線に関する 4 頂点定理）** $C^3$ 級の卵形線には少なくとも 4 つ頂点が存在する．

**証明** 卵形線に 2 つしか頂点がないとして矛盾を導けばよい．2 つの頂点を $\gamma(0)$, $\gamma(v)$ $(0 < v < l)$ と仮定しても一般性を失わない．すると，区間 $(0, v)$ と $(v, l)$ では $\kappa$ は増加または減少で，2 つの区間での $\kappa'$ の符号は異なる．2 つの頂点 $\gamma(0)$, $\gamma(v)$ を通る直線を

$$ax + by + c = 0$$

とする．すると，

(a) $\kappa'(s)(ax(s) + by(s) + c)$ は区間 $(0, v)$, $(v, l)$ では 0 にならず符号が一致する．

(b) $(x''(s), y''(s)) = \kappa(-y'(s), x'(s))$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}
0 &\neq \int_0^l \kappa'(s)(ax(s) + by(s) + c)ds && \text{((a) より)} \\
&= \Big[\kappa(s)(ax(s) + by(s) + c)\Big]_0^l - \int_0^l \kappa(s)(ax'(s) + by'(s))ds \\
&= \int_0^l (ay''(s) - bx''(s))ds && \text{((b) より)} \\
&= \Big[ay'(s) - bx'(s)\Big]_0^l = 0
\end{aligned}$$

となり矛盾となる．　□

この定理を $C^2$ 級の曲線あるいはまた卵形線でない単純閉曲線に拡張するために，次のシューアの腕長補題を準備する．

**定理 1.6.2（シューア (Schur) の腕長補題）**　$\gamma_i : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$ を弧長変数を径数とする曲線，および $\gamma_i(0)$, $\gamma_i(L)$ を結ぶ線分と $\gamma_i$ で凸図形を作るとする．$\kappa_i(s)$ を $\gamma_i$ の曲率とする．

$$\text{ほとんどすべての } s \text{ に対し} \qquad |\kappa_1(s)| > |\kappa_2(s)| \qquad \text{ならば}$$

$$|\gamma_1(L) - \gamma_1(0)| < |\gamma_2(L) - \gamma_2(0)|$$

長さが等しい 2 本の針金はよく曲げたほうが端点間の距離は短くなる，という直感的には自明なことをこの定理は主張している．

**証明**　$\gamma_i(s)$ の接線が $x$ 軸となす角を $\theta_i(s)$ とすると $\kappa_i = \frac{d\theta_i}{ds}$．上下逆転させると $\kappa$ の符号が変わるので，$\kappa_i \geq 0$ として証明すれば十分．$\gamma_1$ を回転させて $\gamma_1(0)$, $\gamma_1(L)$ が $x$ 軸上にあるとしてよい．このとき $t_0$ $(0 < t_0 < L)$ が存在

して，$\gamma_1'(t_0)$ が $x$ 軸方向を向く．さらに $\gamma_2$ を回転させて $\gamma_2'(t_0)$ が $x$ 軸方向を向くと仮定できる．

$\gamma_i'(s)$ が $x$ 軸となす角は $\theta_i(s)$ なので，$\gamma_1$ の凸性から $\theta_1(t) \in [-\pi, \pi]$．さらに，

$$|\theta_i(t)| = |\theta_i(t) - \theta_i(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t} \theta_i'(s)ds\right| = \left|\int_{t_0}^{t} \kappa_i(s)ds\right| = \int_{t_0}^{t} \kappa_i(s)ds$$

であり，ほとんどすべての $s$ に対し $\kappa_1(s) > \kappa_2(s)$ より $\pi \geq |\theta_1(s)| > |\theta_2(s)|$ で

$$\cos|\theta_1(s)| < \cos|\theta_2(s)|$$

となる．

$$\langle \gamma_i(L) - \gamma_i(0), (1,0)\rangle = \int_0^L \langle \gamma_i'(s), (1,0)\rangle ds = \int_0^L \cos|\theta_i(s)|ds$$

なので

$$\begin{aligned} |\gamma_1(L) - \gamma_1(0)| = \langle \gamma_1(L) - \gamma_1(0), (1,0)\rangle &= \int_0^L \cos|\theta_1(s)|ds \\ &< \int_0^L \cos|\theta_2(s)|ds = \langle \gamma_2(L) - \gamma_2(0), (1,0)\rangle \\ &\leq |\gamma_2(L) - \gamma_2(0)| \end{aligned}$$

となり主張を得る． □

**定理 1.6.3** $C^2$ 級の卵形線は曲率の極値を少なくとも 4 点でとる．

**証明** 曲率の極値が 2 点として矛盾を導く．2 点 $P$, $Q$ が曲率の極値とする．点 $P$ で最小，点 $Q$ で最大とする．曲線は 2 点 $P$, $Q$ により 2 つの弧に分かれるが，$\alpha(t)$ を一方の弧の径数表示，$\beta(t)$ を他方の弧の径数表示で，$\alpha(t)$ での曲率が $\beta(t)$ での曲率に等しいようなものが存在する．このとき，$t_1$ をうまく選べば 2 点 $\alpha(t_1)$, $\beta(t_1)$ が元の閉曲線の弧長を 2 等分する．元の閉曲線をこの 2 点で 2 つの弧に分けると，一方の曲率は他方の曲率より小さいので定理 1.6.2 に矛盾する． □

**補題 1.6.4** $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする直線 $l$ 上に 2 点 $P$, $Q$ をとる．$P$ から $Q$ に至る有向線分 $P + t\boldsymbol{v}$ $(0 \leq t \leq |PQ|)$ と同じ始点および終点をもつ単純

$C^2$ 曲線 $\gamma:[0,l]\to\mathbb{R}^2$ が $\gamma'(0)=\gamma'(l)=\boldsymbol{v}$ を満たし，$\gamma(t)$ が直線 $l$ に対し常に同じ側にあれば，$\gamma$ は少なくとも 2 つの変曲点をもつ．

**証明**　$\gamma(t)$ が直線 $l$ に対し常に同じ側にあるので，ある $\varepsilon>0$ が存在して $(0,\varepsilon)$, $(l-\varepsilon,l)$ での $\kappa$ の符号は一致する．接ベクトル $\gamma'(s)$ が $x$ 軸となす角を $\theta(s)$ とすると，

$$\int_0^l \kappa(s)ds=\int_0^l \frac{d\theta}{ds}ds=\theta(l)-\theta(0)=0$$

であるから，$\kappa$ は区間 $(0,l)$ で少なくとも 2 回は 0 にならなければならない．　□

**定理 1.6.5（単純閉曲線に関する 4 頂点定理）**　$C^2$ 級の単純閉曲線は曲率の極値を少なくとも 4 点でとる．特に $C^3$ 級の単純閉曲線は少なくとも 4 つ頂点をもつ．

**証明**　曲率が極値をとる点が 2 点しかない単純閉曲線 $\Gamma$ があったとする．すると，$\kappa$ の符号変化は高々 2 回であり，変曲点は多くても 2 点であることがわかる．卵形線であればすでに示したから，卵形線でないとして証明する．卵形線でないと，曲線と 2 点 $A$, $B$ で接する直線 $l$ が存在する．2 点 $A$, $B$ は曲線を，内側の弧 $\Gamma_1$ と外側の弧 $\Gamma_2$ に分ける．補題 1.6.4 より，$\Gamma_1$ には少なくとも 2 つの変曲点があり，$\Gamma_2$ には変曲点がないことになる．

$\Gamma_1$ の変曲点の間に曲率の極値が少なくとも 1 つある．よって，$\Gamma_2$ に曲率の極値が少なくとも 2 つあることを示せれば元の単純閉曲線上に 3 箇所曲率 $\kappa$ の極値があることになり，$\kappa$ の周期性から極値の個数は偶数個なので，曲率の極値は少なくとも 4 点でとることがわかる．よって頂点は少なくとも 4 つある．

$\Gamma_2$ が曲率の極値を含まないとすると，$\Gamma_2$ 上 $\kappa$ は増加関数または減少関数である．線分 $AB$ 上曲率は 0 で，閉曲線 $\Gamma_2\cup\overline{AB}$ 上曲率は連続関数なので，$\Gamma_2$ 上曲率は少なくとも 1 回極値をとる．その点を $P$ とする．$\Gamma_2$ 上曲率は少なくとも 2 回極値をとることを示す．ここで，必要なら鏡像をとることにより，$P$ で曲率が最大値をとると仮定してよい．

もし $P$ 以外に極値がないとすると，$\alpha(t)$ を弧 $AP$ の径数表示，$\beta(t)$ を弧 $BP$ の径数表示で，$\alpha(t)$ での曲率が $\beta(t)$ での曲率に等しいようなものが存在

する．線分 $AB$ の長さは $\Gamma_2$ の弧長より小さいから，2 点 $\alpha(t_1)$, $\beta(t_1)$ が閉曲線 $\Gamma_2 \cup \overline{AB}$ の弧長を 2 等分するような $t_1$ が存在する．$\Gamma_2 \cup \overline{AB}$ を 2 点 $\alpha(t_1)$, $\beta(t_1)$ で分けると，一方の曲率は他方の曲率より小さいので定理 1.6.2 に矛盾する． □

### 1.6.2 等周不等式

**定理 1.6.6（等周不等式）** 長さ $l$ の単純閉曲線が囲む部分の面積 $A$ は次の不等式を満たし，等号成立は円のときに限る．

$$A \le \frac{l^2}{4\pi}$$

**証明** 半径 $r$ の円の周長は $2\pi r$，面積は $\pi r^2$ であり，上の不等式で等号が成立する．

卵形線でなければ，曲線をその凸包の境界に現れる卵形線に取り替えると，その面積は増大し周長は減る．よって，卵形線について示せば十分．

卵形線が方向 $\boldsymbol{u}$ をもつ直線に対して線対称でないとする．回転を合成して $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ としてよい．曲線が $y = f_+(x)$, $y = f_-(x)$ $(a \le x \le b,\ f_-(x) \le f_+(x)))$ で表されているとする．この面積 $A(f)$ と周長 $L(f)$ は

$$A(f) = \int_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx$$

$$L(f) = f_+(a) - f_-(a) + \int_a^b \sqrt{1 + {f_+'}^2}dx + \int_a^b \sqrt{1 + {f_-'}^2}dx + f_+(b) - f_-(b)$$

で与えられる．このとき，

$$g_+(x) = \frac{f_+(x) - f_-(x)}{2}, \qquad g_-(x) = \frac{f_-(x) - f_+(x)}{2}$$

で新しい曲線を定めると，$g_+(x) - g_-(x) = f_+(x) - f_-(x)$ なので $A(g) = A(f)$．実は $L(g) < L(f)$ が示せる．これを示すには，次の不等式

$$\sqrt{1 + {g_+'}^2} + \sqrt{1 + {g_-'}^2} \le \sqrt{1 + {f_+'}^2} + \sqrt{1 + {f_-'}^2}$$

が成立することを示せばよい．ただし，等号成立は $f'_+ + f'_- = 0$ のときに限る．

$$左辺 = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}(f'_+ - f'_-)^2} = \sqrt{4+(f'_+ - f'_-)^2}$$

なので，次の不等式を示せばよい．

$$4+(f'_+ - f'_-)^2 \leq \left(\sqrt{1+{f'_+}^2} + \sqrt{1+{f'_-}^2}\right)^2$$

右辺が $2+{f'_+}^2+{f'_-}^2+2\sqrt{1+{f'_+}^2}\sqrt{1+{f'_-}^2}$ なので

$$2-2f'_+f'_- \leq 2\sqrt{1+{f'_+}^2}\sqrt{1+{f'_-}^2}$$

であり，$(1-f'_+f'_-)^2 \leq (1+{f'_+}^2)(1+{f'_-}^2)$ を示せばよいが，この式は

$$1-2f'_+f'_- + (f'_+f'_-)^2 \leq 1+{f'_+}^2+{f'_-}^2+(f'_+f'_-)^2$$

であり，常に成立する．等号成立は $f'_+ + f'_- = 0$ のときに限る．

よって，面積を固定したとき，周長を最短にする単純閉曲線は，各単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し $\boldsymbol{u}$ を方向ベクトルとするある直線について線対称であることがわかる．このとき，平行移動によって，この曲線は $x$ 軸と $y$ 軸に対して対称であるとしてよい．すると，この曲線は原点対称でなければならず，任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，$\boldsymbol{u}$ を方向ベクトルとする対称の中心の直線は原点対称でなければならない．任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，$\boldsymbol{u}$ を方向ベクトルとする対称の中心となる直線の一意性より，この直線は原点を通らなければならない．さらに，この直線は曲線と直交する．よって，$\langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle = 0$ となり，$|\gamma(t)|^2$ が定数であることがわかる．□

### 1.6.3　平面曲線の回転数と正則ホモトピー

**定義 1.6.7（回転数，全曲率）**　弧長 $s$ を径数とする曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ の曲率を $\kappa(s)$ とする．このとき，回転数 (rotation number) $i_r$ を次で定義する．

$$i_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \kappa(s)ds$$

$\int_0^l \kappa(s)ds$ を**全曲率** (total curvature) という.

平面曲線の全曲率は向き付けられた曲線に対して定まる不変量である. 向きを逆にすれば全曲率の符号は変わる.

**定理 1.6.8** 閉曲線 $\gamma(s)$ の回転数は整数である.

**証明** $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ より,

$$\int_0^l \kappa(s)ds = [\theta(s)]_0^l = \theta(l) - \theta(0)$$

となる. これは $\theta$ の曲線 $\gamma$ に沿っての増分であり, $2\pi$ の整数倍である. □

**定義 1.6.9 (正則ホモトピー)** $\gamma_0(s)$, $\gamma_1(s)$ が**正則ホモトピー同値** (regular homotopy equivalent) であるとは, 以下の 2 条件 (1), (2) を満たす連続写像

$$H : [0,l] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \mapsto H_t(s) = H(s,t)$$

が存在するときをいう.

(1) $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$

(2) 各 $t$ に対し, $s \mapsto H_t(s)$ $(0 \le s \le l)$ は滑らかな閉曲線で $\frac{dH_t}{ds}(s) \neq 0$.

2 つの曲線が正則ホモトピーであるとは, 正則であるという条件を保ったまま, 曲線が連続的に移り合うことである. 正則ホモトピー同値は同値関係である.

**例 1.6.10 (正則ホモトピーの例)** 正則ホモトピーの例を挙げる.

- $\gamma(s)$ とそれを平行移動したもの $\gamma(s) + \boldsymbol{v}$ は正則ホモトピー同値である.

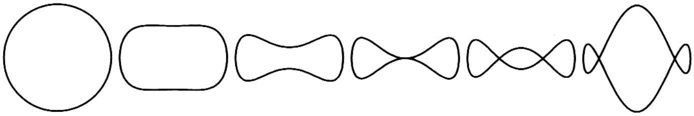
$$H(s,t) = \gamma(s) + t\boldsymbol{v}$$

- $\gamma(s)$ とそれを原点を中心に角度 $\theta$ 回転移動したものは正則ホモトピー同値である.

$$H(s,t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix} \gamma(s)$$

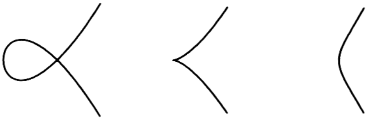
- $a \neq 0$ とする. $H(s,t) = (1 + (a-1)t)\gamma(s)$ $(0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1)$ とおくと, これは $\gamma(s)$ から $a\gamma(s)$ への正則ホモトピーを与える.

**例 1.6.11**　$H_t(s) = (\cos s, (1-2t\sin^2 s)\sin s)$ $(s \in [0, 2\pi])$ は正則ホモトピーである．




正則ホモトピーの定義から条件 (2) を除いたものを，単にホモトピーという[7]．

**例 1.6.12**　$\gamma_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_\lambda(t) = (t^2, \lambda t + t^3)$ は，$\lambda = 0$ で正則でない．正則でないホモトピーの例である．$\lambda = 0$ のとき原点で尖点である．




**定理 1.6.13（ホイットニー (Whitney) の定理）**　2つの閉曲線が正則ホモトピー同値であるための必要十分条件は回転数が等しいことである．

**証明**　相似変換は回転数を変えないから，2つの閉曲線 $\gamma_0(s)$, $\gamma_1(s)$ は共に長さが1であると仮定してよい．$i = 0, 1$ として，$\gamma_i(s)$ の曲率を $\kappa_i(s)$, $\theta_i(t) = \int_0^t \kappa_i(u)du$ とおけば，回転数が等しいから，$\theta_0(1) - \theta_0(0) = \theta_1(1) - \theta_1(0)$ である．適当に回転と平行移動を合成して，

$$\gamma_i(s) = \int_0^s (\cos\theta_i(t), \sin\theta_i(t))dt$$

としてよい．このとき $\theta_t(s) = (1-t)\theta_0(s) + t\theta_1(s)$ は $s$ に関して周期1の関数であり，$\mathbf{c}_t$ を $t$ には依存してもよいが $s$ には依存しないベクトルとすると

[7] homotopy の訳語はホモトピーで定着していると思う．中国語では日本語の「倫」に相当する漢字が当てられていて，同倫という．この場合「倫」とは同類，同等のものを意味する語である．

$\boldsymbol{v}_t(s) = (\cos\theta_t(s),\ \sin\theta_t(s)) - \boldsymbol{c}_t$ もまた $s$ に関して周期 1 の関数である．周期関数の原始関数が周期関数になるには，その関数の 1 周期上の積分が 0 なることが必要であるが，$\boldsymbol{c}_t = \int_0^1 (\cos\theta_t(s),\ \sin\theta_t(s))ds$ とおくとこの性質を満たすので，

$$H(t,s) = \gamma_t(s) = \int_0^s \boldsymbol{v}_t(u)du$$

は，周期 1 をもつことがわかる．これは $\gamma_t(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ が閉曲線であることを意味している．さて，

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = \frac{d\gamma_t}{ds} = \boldsymbol{v}_t(s) - \int_0^1 \boldsymbol{v}_t(u)du$$

がゼロベクトルにならないことを示す．$|\boldsymbol{v}_t(s)| = 1$ なので

$$\left|\int_0^1 \boldsymbol{v}_t(u)du\right| \leq \int_0^1 |\boldsymbol{v}_t(u)|du = 1$$

となり[8]，等号成立はある定ベクトル $\boldsymbol{w}_t$ と非負値関数 $c_t(s)$ が存在して $\boldsymbol{v}_t(s) = c_t(s)\boldsymbol{w}_t$ と書けるときに限る．$|\boldsymbol{v}_t(s)| = 1$ より $c_t(s) = 1/|\boldsymbol{w}_t|$ となり，$c_t(s)$ は $s$ に依存せず，したがって $\boldsymbol{v}_t(s)$ が $s$ に依存しないことがわかる．

$\boldsymbol{v}_t(s)$ が $s$ に依存するとき，

$$\left|\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right| \geq |\boldsymbol{v}_t(s)| - \left|\int_0^1 \boldsymbol{v}_t(u)du\right| > |\boldsymbol{v}_t(s)| - 1 = 0$$

となり，$\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)$ が 0 にならないことがわかる．$\boldsymbol{v}_t(s)$ が $s$ に依存しないとき，$\theta_t(s)$ が $t$ のみの関数で $s$ によらない．このときは $\gamma_t(s)$ は直線で閉曲線になりえない． □

**定義 1.6.14（巻き数）** 閉曲線 $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ と $\gamma$ 上にない点 $P$ に対し，連続関数 $\vartheta(t)$ を $\frac{\gamma(t)-P}{|\gamma(t)-P|} = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ を満たすようにとる．点 $P$ の

---

[8] ベクトル値関数 $\boldsymbol{v}(s)$ とベクトル $\boldsymbol{w}$ に対し，$\langle \boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{w}\rangle \leq |\boldsymbol{v}(s)||\boldsymbol{w}|$ なので

$$\left\langle \int_0^1 \boldsymbol{v}(s)ds, \boldsymbol{w}\right\rangle \leq \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{w}\rangle ds \leq \int_0^1 |\boldsymbol{v}(s)||\boldsymbol{w}|ds \leq |\boldsymbol{w}|\int_0^1 |\boldsymbol{v}(s)|ds$$

となり，$\boldsymbol{w} = \int_0^1 \boldsymbol{v}(s)ds$ とおいて得られる不等式 $|\boldsymbol{w}|^2 \leq |\boldsymbol{w}|\int_0^1 |\boldsymbol{v}(s)|ds$ の両辺から $|\boldsymbol{w}|$ を約せば，求めたい不等式 $|\boldsymbol{w}| \leq \int_0^1 |\boldsymbol{v}(s)|ds$ を得る．等号成立は，$\boldsymbol{v}(s) = c(s)\boldsymbol{w}$ となる非負値関数 $c(s)$ が存在するときに限る．

周りの $\gamma$ の**巻き数** $w_P(\gamma)$ を次で定義する．

$$w_P(\gamma) = \frac{\vartheta(l) - \vartheta(0)}{2\pi}$$

$P$ を端点とする半直線 $L$ で閉曲線 $\gamma$ と横断的に交わるものを引けば巻き数 $w_P(\gamma)$ は次式で計算することができる．

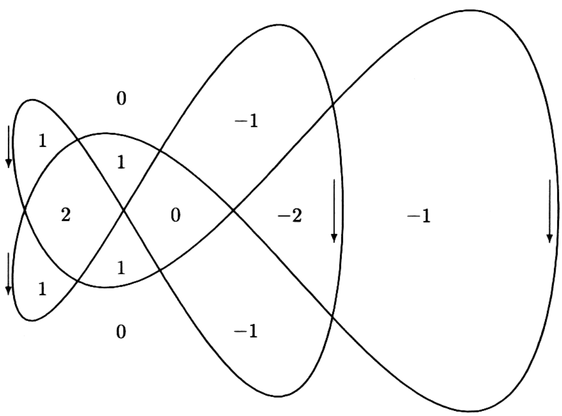
$$w_P(\gamma) = \sum_{t \in T} \operatorname{sign} \vartheta'(t), \quad T = \{t : \gamma(t) \in L\}$$

$P$ が $\gamma$ 上にあって，$\gamma$ の自己交点でなければ，次式で巻き数 $w_P(\gamma)$ の定義を拡張しておく．

$$w_P(\gamma) = \frac{w_{P_+}(\gamma) + w_{P_-}(\gamma)}{2}, \quad \begin{cases} P_+ = P + \varepsilon \boldsymbol{n}(P), \\ P_- = P - \varepsilon \boldsymbol{n}(P) \end{cases}$$

ただし，$\varepsilon$ は十分小さい正の数で，$\boldsymbol{n}(P)$ は点 $P$ での $\gamma$ の単位法ベクトル．

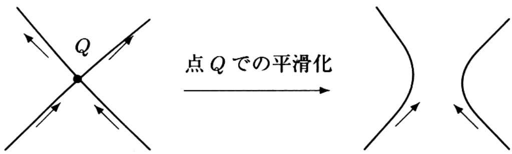
**例 1.6.15**　巻き数は曲線の補集合の連結成分上変わらない．巻き数の計算例を図で示す．$\gamma(t) = (\cos 2t + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin t)$.




**注意 1.6.16**　閉曲線 $\gamma$ の回転数 $i(\gamma)$ は原点 0 の周りでの $\gamma'$ の巻き数である．すなわち $i(\gamma) = w_0(\gamma')$ である．

横断的な自己交差のみをもつ向き付けられた閉曲線 $\gamma$ を考え，自己交点を 1 つとりそれを点 $Q$ とする．点 $Q$ で（向きを考慮して）$\gamma$ を図のように平滑化

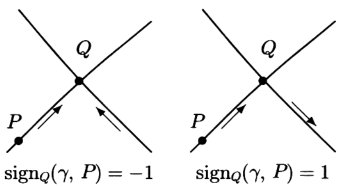
する．




すると，2 つの閉曲線 $\gamma_1$, $\gamma_2$ が得られるが，巻き数については次が成り立つ．

$$w_P(\gamma) = w_P(\gamma_1) + w_P(\gamma_2)$$

閉曲線 $\gamma$ が，横断的な自己交差しかもたないとき，$\gamma$ 上に点 $P$ をとれば，自己交差する点 $Q$ での指数 $\mathrm{sign}_Q(\gamma, P)$ を次図のように定義できる．




**定理 1.6.17（ホイットニーの公式）** $\gamma$ の回転数 $i(\gamma)$ は次式で与えられる．

$$i(\gamma) = 2w_P(\gamma) + \sum_Q \mathrm{sign}_Q(\gamma, P)$$

**証明** 交点の数 $n$ に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らか（演習 1.6.5 参照）．$n-1$ まで証明できたとする．点 $P$ から曲線を辿って行って，すでに辿った部分と最初にぶつかる交点を $Q$ とする．$Q$ で曲線を平滑化して，元の閉曲線 $\gamma$ を，単純閉曲線 $\gamma_1$ ともう 1 つの閉曲線 $\gamma_2$ に分けることができる．$\gamma$ の自己交点全体 $A$ は $\gamma_1$ と $\gamma_2$ の交点全体 $A_1$ と $\gamma_2$ の自己交点全体 $A_2$，および $\{Q\}$ の 3 つに分けられる．また丸めた部分の曲率の積分は交点での曲線のなす角度に等しいので，$\gamma_1$ と $\gamma_2$ で打ち消し合い，

$$i(\gamma) = i(\gamma_1) + i(\gamma_2)$$

を得る．単純閉曲線 $\gamma_1$ については

$$i(\gamma_1) = 2w_P(\gamma_1) + \mathrm{sign}_Q(\gamma, P) \tag{1.6.1}$$

が成り立つ．閉曲線 $\gamma_2$ については帰納法の仮定が使えて，

$$i(\gamma_2) = 2w_P(\gamma_2) + \sum_{R \in A_2} \mathrm{sign}_R(\gamma, P) \tag{1.6.2}$$

式 (1.6.1) と (1.6.2) を加えれば次式を得る．

$$i(\gamma) = 2w_P(\gamma) + \mathrm{sign}_Q(\gamma, P) + \sum_{R \in A_2} \mathrm{sign}_R(\gamma, P)$$

次の補題 1.6.18 より，$\sum_{R \in A_1} \mathrm{sign}_R(\gamma, P) = 0$ なので証明を終わる． □

**補題 1.6.18**　有向単純閉曲線 $\sigma$ が有向閉曲線 $\gamma$ と横断的に交わるとき，その $\gamma$ が単純閉曲線 $\sigma$ に入る点と出る点の交点の個数は等しい．

**証明**　明らか． □

### 1.6 節の演習

**演習 1.6.1**　例 1.6.11 は正則ホモトピーであることを示せ．

**演習 1.6.2**　単純でない閉曲線（自己交差のある閉曲線）では 4 頂点定理は成り立たないことを示せ．

**演習 1.6.3**　$s$ を弧長変数とする単純閉曲線 $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ $(s \mapsto \gamma(s))$ で囲まれた部分の面積は $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \langle \gamma, \boldsymbol{n} \rangle ds$ であることを示せ．

**演習 1.6.4**　線分 $AB$ と線分の端点 $A$, $B$ を長さ $l$ の曲線 $C$ で結んで囲まれてできる領域を考える．この領域の面積が最大ならば $C$ が円弧であることを示せ．

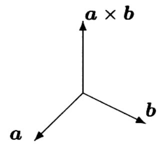
**演習 1.6.5**　交点数が 1 のとき，定理 1.6.17 を確かめよ．

# 1.7 空間曲線

## 1.7.1 $\mathbb{R}^3$ の空間曲線

■**外積**　$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，**外積** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



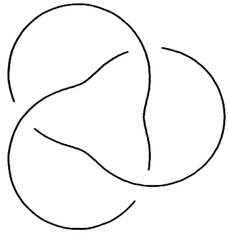

ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 双方に直交し，その長さが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積で，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の順に右手系をなす．

■**$\mathbb{R}^3$ の空間曲線**　空間曲線 $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ を考える．

**例 1.7.1（トーラス結び目）** $p, q$ を互いに素な自然数とする．

$$x = (2 + \cos qt)\cos pt, \quad y = (2 + \cos qt)\sin pt, \quad z = -\sin qt$$

は回転トーラス $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$ 内の空間曲線である．



$(p, q) = (2, 3)$

$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}$ が零にならない点を曲線の**正則**点という．

曲線の弧長変数 $s$ は次で与えられる．

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

正則点では $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}| > 0$ なので，逆関数定理より，$t$ は $s$ の関数と見なせる．よって曲線を，弧長を変数とした写像 $s \mapsto \gamma(t(s))$ で表すことができる．$|\gamma'| = 1$ に注意する．

$$\boldsymbol{e} = \gamma', \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}'}{|\boldsymbol{e}'|}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$$

とおく．$\boldsymbol{e}' = \gamma'' \neq 0$ のとき $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ は定義可能である．$\boldsymbol{e}$ を単位接ベクトル，$\boldsymbol{n}$ を単位主法線ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を単位従法線ベクトルという．ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ の組を**フレネ・セレ枠** (Frenet-Serret frame) という．

**定理 1.7.2（フレネ・セレの公式）**　$\kappa = |\boldsymbol{e}'|$, $\tau = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b} \rangle$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

**証明**　$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle \equiv 1$ を $s$ で微分して $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}' \rangle \equiv 0$ となり，$\boldsymbol{e}' = |\boldsymbol{e}'|\boldsymbol{n} = \kappa \boldsymbol{n}$.

$\boldsymbol{n}' = a_1 \boldsymbol{e} + a_2 \boldsymbol{n} + a_3 \boldsymbol{b}$ とおいて，係数 $a_1$, $a_2$, $a_3$ を決定しよう．

$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n} \rangle \equiv 0$ を $s$ で微分して，$0 = \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}' \rangle = \langle \kappa \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}' \rangle = \kappa + a_1$．$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle \equiv 1$ を $s$ で微分すると，$0 = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n} \rangle = a_2$．$\tau = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b} \rangle = a_3$．よって，$\boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{b}$ がわかる．

$\boldsymbol{b}' = b_1 \boldsymbol{e} + b_2 \boldsymbol{n} + b_3 \boldsymbol{b}$ とおいて，係数 $b_1$, $b_2$, $b_3$ を決定しよう．

$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e} \rangle \equiv 0$ を $s$ で微分して，$0 = \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}' \rangle = \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \kappa \boldsymbol{n} \rangle = b_1$．

$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle \equiv 0$ を $s$ で微分して，$0 = \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}' \rangle = b_2 + \tau$.

$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \equiv 1$ を $s$ で微分して，$0 = \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b} \rangle = b_3$．よって $\boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}$ がわかる． □

$\kappa$ を**曲率** (curvature)，$\tau$ を**捩率** (torsion) と呼ぶ．

曲率，捩率の意味を理解するために，$s$ を弧長変数として $s = 0$ での $\gamma(s)$ のテイラー展開を見てみよう．

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{1}{2}\gamma''(0)s^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(0)s^3 + \cdots$$

$\gamma' = \boldsymbol{e}$, $\gamma'' = \kappa \boldsymbol{n}$, $\gamma''' = (\kappa \boldsymbol{n})' = \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa \boldsymbol{n}' = \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa(-\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{b})$ より，

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \boldsymbol{e}(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)\boldsymbol{n}(0)s^2 + \frac{1}{6}(\kappa'(0)\boldsymbol{n}(0) - \kappa(0)^2\boldsymbol{e}(0) + \kappa(0)\tau(0)\boldsymbol{b}(0))s^3 + \cdots$$

$\gamma(0) = (0,0,0)$, $\boldsymbol{e}(0) = (1,0,0)$, $\boldsymbol{n}(0) = (0,1,0)$, $\boldsymbol{b}(0) = (0,0,1)$ とすると，次の定理を得る．

**定理 1.7.3（空間曲線の局所標準形（ブーケー (Bouquet) の公式））**

$$\gamma(s) = \left(s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3 + \cdots,\ \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 + \cdots,\ -\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + \cdots\right)$$

弧長変数は簡単に求められないことが多いので，曲率を計算するには一般の径数による表示が必要になる．

**定理 1.7.4（枠，曲率と捩率の径数表示）** 空間曲線 $\gamma(t)$ に対し，

$$\boldsymbol{e} = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|},\quad \boldsymbol{n} = \frac{(\dot\gamma \times \ddot\gamma) \times \dot\gamma}{|(\dot\gamma \times \ddot\gamma) \times \dot\gamma|},\quad \boldsymbol{b} = \frac{\dot\gamma \times \ddot\gamma}{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|},\quad \kappa = \frac{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3},\quad \tau = \frac{\det(\dot\gamma\ \ddot\gamma\ \dddot\gamma)}{|\dot\gamma \times \ddot\gamma|^2}$$

**証明** 枠の $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ の表示式は明らか．$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}$ より，$\boldsymbol{n}$ の式も出る．ベクトル 3 重積の公式より次が成り立つことにも注意する．

$$(\dot\gamma \times \ddot\gamma) \times \dot\gamma = |\dot\gamma|^2\ddot\gamma - (\dot\gamma \cdot \ddot\gamma)\dot\gamma$$

$\dot\gamma(t) = \frac{ds}{dt}\gamma' = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e} = |\dot\gamma(t)|\boldsymbol{e}$ より，

$$\begin{aligned}\ddot\gamma(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot\gamma(t)|\dot{\boldsymbol{e}} = \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot\gamma(t)|\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}' \\ &= \left(\frac{d}{dt}|\gamma(t)|\right)\boldsymbol{e} + |\dot\gamma(t)|^2\kappa\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

なので

$$\dot\gamma \times \ddot\gamma = (|\dot\gamma|\boldsymbol{e}) \times (*\boldsymbol{e} + |\dot\gamma(t)|^2\kappa\boldsymbol{n}) = |\dot\gamma|^3\kappa\boldsymbol{b} \tag{1.7.1}$$

となり，$\kappa$ の式を得る．$|\gamma|^2 = \gamma \cdot \gamma$ より，$\left(\frac{d}{dt}|\gamma|\right)|\gamma| = \dot\gamma \cdot \gamma$ なので

$$\ddot\gamma = \frac{\dot\gamma \cdot \gamma}{|\gamma|}\boldsymbol{e} + |\dot\gamma|^2\kappa\boldsymbol{n}$$

となり，これを $t$ で微分して，

$$\dddot{\gamma} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}\Big)\boldsymbol{e} + \frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}' + \frac{d}{dt}\Big(|\dot{\gamma}|^2\kappa\Big)\boldsymbol{n} + |\dot{\gamma}|^2\kappa\frac{ds}{dt}\boldsymbol{n}'$$
$$= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}\Big)\boldsymbol{e} + \frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}|\dot{\gamma}|\kappa\boldsymbol{n} + (2\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma}\kappa + |\dot{\gamma}|^2\dot{\kappa})\boldsymbol{n} + |\dot{\gamma}|^3\kappa(-\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b})$$
$$= \Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}\Big) - \kappa^2|\dot{\gamma}|^3\Big)\boldsymbol{e} + \Big(\frac{\dot{\gamma}\cdot\gamma}{|\gamma|}|\dot{\gamma}|\kappa + (2\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma}\kappa + |\dot{\gamma}|^2\dot{\kappa})\Big)\boldsymbol{n} + |\dot{\gamma}|^3\kappa\tau\boldsymbol{b}$$

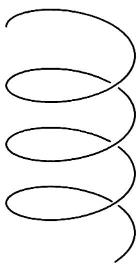
を得る．よって

$$\det(\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma}\ \dddot{\gamma}) = \det(|\dot{\gamma}|\boldsymbol{e}\ \ (*)\boldsymbol{e} + |\dot{\gamma}|^2\kappa\boldsymbol{n}\ \ (*)\boldsymbol{e} + (*)\boldsymbol{n} + |\dot{\gamma}|^3\kappa\tau\boldsymbol{b}) = |\dot{\gamma}|^6\kappa^2\tau$$

となり，これと式 (1.7.1) を比較して，$\tau$ の式を得る． □

**例 1.7.5（螺線）** $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $(a,b) \neq (0,0)$ とする．

計算していくと，順に



$$\dot{\gamma} = (-a\sin t, a\cos t, b)$$
$$\ddot{\gamma} = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$
$$\dddot{\gamma} = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

となるので $|\dot{\gamma}| = \sqrt{a^2+b^2}$ となり，$s = t\sqrt{a^2+b^2}$ となる．

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, -a\cos t, b)$$
$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{dt}{ds}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}}{|\frac{dt}{ds}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}|} = \mathrm{sign}(a)(-\cos t, \sin t, 0)$$
$$\boldsymbol{b} = \frac{\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}|} = \frac{\mathrm{sign}(a)}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$$

を得る．また $\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} = a(b\sin t, -b\cos t, a)$, $\det(\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma}\ \dddot{\gamma}) = a^2b$ となり，次を得る．

$$\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2}, \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

**定理 1.7.6（空間曲線の基本定理）** 区間 $[0,l]$ 上で定義された正値関数 $\kappa(s)$ と，関数 $\tau(s)$ が与えられたとき，$s$ を弧長変数とする曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ で $\kappa(s)$ を曲率，$\tau(s)$ を捩率とするものが存在する．さらにそのような曲線は，

回転と平行移動を除いてただ1つである．

**証明** 3次行列を値にもつ関数 $F(s)$ が，常微分方程式

$$F'(s) = F(s)K(s), \qquad K(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．初期条件 $F(0) = I$（3次の単位行列）の下で，この微分方程式は解を一意的にもつ．

$$\begin{aligned}(F(s)^t F(s))' &= F'(s)^t F(s) + F(s)^t F'(s) \\ &= F(s)(K(s) + {}^t K(s))^t F(s) = 0\end{aligned}$$

であるから，$F(s)^t F(s)$ は $s$ によらない定数行列で $F(0)^t F(0) = I$ なので，$F(s)$ は直交行列である．$F(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ と書くと $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ は正規直交枠であり，

$$\gamma(s) = \int_0^s \boldsymbol{e}(t)dt$$

が求める曲線である．一意性の主張は微分方程式の解の一意性の帰結である． □

### 1.7.2 $\mathbb{R}^n$ の空間曲線

空間曲線 $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ を考える．弧長変数 $s$ による微分 $\gamma'$, $\gamma''$, $\cdots$, $\gamma^{(n-1)}$ が1次独立と仮定する．正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を次を満たすようにとる．

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \gamma', \cdots, \gamma^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

ただし，$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k : a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}\}$．このとき，前節と同様の計算で，次を満たす $\kappa_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ が存在する．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{e}_3' \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

$\kappa_1$ を第1曲率または単に曲率という．

### 1.7.3　全　曲　率

$\gamma(t)$ $(0 \le t \le l)$ を $\mathbb{R}^n$ の曲線とする．$[0, l]$ の分割 $\Delta$ $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = l)$ に対し，

$$K(\gamma, \Delta) = \sum_{i=1}^{m-1} \angle(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}),\ \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

とする．$\gamma$ の**全曲率** (total curvature) $K(\gamma)$ を次で定める．

$$K(\gamma) = \sup\{K(\gamma, \varDelta) : \varDelta \text{ は } [0, l] \text{ の分割 }\}$$

**定理 1.7.7（全曲率）**　$s$ を弧長変数として $\gamma(s)$ $(0 \le s \le l)$ を $\mathbb{R}^n$ の曲線とする．このとき

$$\int_0^l |\gamma''(s)| ds = \int_0^l \kappa(s) ds = K(\gamma)$$

この定理より，曲率は次のように解釈できる．

$$\kappa(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \sup\{K(\gamma\big|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}), \Delta) : \Delta \text{ は } [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \text{ の分割 }\}$$

**証明**　$S^{n-1}$ の2点 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対し

$$d_{S^{n-1}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

とおくと，これは距離の公理を満たす．分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = l$ に対し，$|\Delta| = \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, 1, \cdots, m\}$,

$$d(\gamma,\Delta)=\sum_{i=1}^{m-1}\angle(\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i),\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})))$$

とおく．$\Delta'$ が $\Delta$ の細分ならば，$d_{S^{n-1}}$ に関する 3 角不等式より

$$d(\gamma,\Delta')\geq d(\gamma,\Delta)$$

がわかる．よって

$$\lim_{|\Delta|\to 0}d(\gamma,\Delta)=L_{S^{n-1}}(\gamma')=L(\gamma')=\int_0^l|\gamma''|ds$$

となり証明を終わる． □

$\mathbb{R}^3$ 内の原点からの距離が 1 である点の集合を $S^2$ と書き 2 次元球面という．

**補題 1.7.8** $\boldsymbol{w}\in S^2$ に対し $\boldsymbol{w}$ の直交補空間への正射影を $p_{\boldsymbol{w}}$ で表す．すなわち，$p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{w}$ とする．$dA$ を $S^2$ の面積要素[9]とするとき，

$$\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{w}\in S^2}\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}))dA$$

**証明** $\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{y}$ を適当な正の実数倍しても右辺の積分は変わらないことに注意しよう．$\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$ $(\lambda>0)$ のとき $\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),\lambda p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}))=0$ なので右辺の積分は 0 である．$\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$ $(\lambda<0)$ のとき $\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),\lambda p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}))=\pi$（$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{x}$ の定数倍でないとき）なので，単位球の表面積が $4\pi$ であることに注意すれば，右辺の積分は $\pi$ である．

$\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\angle(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')$ なる $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}'$ をとる．$\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ を $\boldsymbol{x}'/|\boldsymbol{x}'|$ に $\boldsymbol{y}/|\boldsymbol{y}|$ を $\boldsymbol{y}'/|\boldsymbol{y}'|$ に移す回転を合成しても右辺の積分は変わらないので，右辺の積分は角度 $\theta=\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ のみで決まることになる．これを $f(\theta)$ と書こう．

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を同一平面上にとり $\theta_1=\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\theta_2=\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とおくと，$\theta_1+\theta_2=\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ であるので $\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}))+\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}),p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{z}))=\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}),p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{z}))$ となり，この式を $S^2$ 上で積分すれば，

$$\theta_1\geq 0,\ \theta_2\geq 0,\ 0\leq\theta_1+\theta_2\leq\pi \text{ ならば } f(\theta_1)+f(\theta_2)=f(\theta_1+\theta_2)$$

---

[9]面積要素については 2.2.3 節を参照．

を得る．$f(\pi)=\pi$ であるから $f(\theta)=\theta$ がわかる．　□

$\mathbb{R}^3$ の有限個の点 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{p}_0$ を順につないで閉折線 $P$ を作る．$\boldsymbol{p}_{m+1}=\boldsymbol{p}_1$ として，閉折線 $P$ の**全曲率**を次で定める．

$$K(P)=\sum_{i=1}^{m}\angle(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)$$

前定理より，曲線の全曲率が折線の全曲率で近似することができる[10]．

$C^\infty$ 写像 $\gamma:[0,l]\to\mathbb{R}^3$ が閉曲線であるとは，$d\gamma/dt$ が 0 にならず，$\gamma(0)=\gamma(l)$, $\gamma^{(k)}(0)=\gamma^{(k)}(l)$ $(k=1,2,\cdots)$ が成り立つときをいう．

**定理 1.7.9**　閉曲線 $\gamma:[0,l]\to\mathbb{R}^3$ に対し，その全曲率 $K(\gamma)$ はすべての方向に正射影して得られる平面曲線の全曲率の平均である．すなわち次が成り立つ．

$$K(\gamma)=\frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{w}\in S^2}K(p_{\boldsymbol{w}}\circ\gamma)dA$$

**証明**　区間 $[0,l]$ の分割 $\Delta$: $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=l$ をとり，$\gamma(t_i)$ を順に線分でつないで得られる折線 $P_\Delta$ を考える．前補題より

$$\angle(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)=\frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{w}\in S^2}\angle(p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1}),p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i))dA$$

であるが，これを $i$ について足し合わせると次を得る．

$$K(P_\Delta)=\frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{w}\in S^2}K(p_{\boldsymbol{w}}(P_\Delta))dA$$

後は $P_\Delta$ で $\gamma$ を $|\Delta|=\max\{t_i-t_{i-1}\}$ が 0 になるように近似すればよい．　□

$\boldsymbol{q}_i=\frac{\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i}{|\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i|}$ とおいて，$\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_m$ を順に大円弧でつないで得られる曲線を $Q$ と書く．$\boldsymbol{q}_i=-\boldsymbol{q}_{i+1}$ となるときは $Q$ は一意には決まらないが，$\alpha_i=\angle(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)<\pi$ を仮定すれば $Q$ は $P$ から一意に定まる．

空間閉曲線 $\gamma:S^1\to\mathbb{R}^3$ と $\boldsymbol{w}\in S^2$ に対し，高さ関数 $h_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}$ の $\gamma$ への制限の極大値と極小値はそれらの個数が有限ならば同数だけあるので，極

[10] 正確には，極限の順序交換定理であるから，極限の順序を交換するための十分条件を確かめればよい．

値の個数は常に偶数個であることに注意しよう．極値の個数を $2\mu(\gamma, \boldsymbol{w})$ と書く．

$$\mu(\gamma) = \min\{\mu(\gamma, \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in S^2\}, \quad \bar{\mu}(\gamma) = \max\{\mu(\gamma, \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in S^2\}$$

$\mu(\gamma)$ を閉曲線 $\gamma$ の**屈曲度** (crookedness) という．

**定理 1.7.10**

$$\int_{\boldsymbol{w} \in S^2} \mu(\gamma, \boldsymbol{w}) dA = 2K(\gamma)$$

**系 1.7.11**

$$\mu(\gamma) \leq \frac{K(\gamma)}{2\pi} \leq \bar{\mu}(\gamma)$$

**証明**　まずは閉折線の場合を考える．$\boldsymbol{w} \in S^2$ に対し，$S^1_{\boldsymbol{w}}$ を $\boldsymbol{w}$ に直交する $S^2$ の大円とする．$S^1_{\boldsymbol{w}}$ が $Q$ の頂点を含まないことは $P$ の辺が $\boldsymbol{w}$ と直交しないことと同値である．このとき次の条件は同値である．

- $Q$ の辺 $\boldsymbol{q}_{j-1}\boldsymbol{q}_j$ が $S^1_{\boldsymbol{w}}$ と交わる．
- $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{p}_{j+1} - \boldsymbol{p}_j)$, $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1})$ の符号が異なる．
- $p_{\boldsymbol{w}}$ が $\boldsymbol{p}_j$ で極値．

よって $S^1_{\boldsymbol{w}}$ と $Q$ の交点の個数が $h_{\boldsymbol{w}}|_P$ の極値の個数である．

これより $S^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} S^1_{\boldsymbol{q}_j}$ の連結成分上，$\mu(\gamma, \boldsymbol{w})$ は定数であり，2つの大円 $S^1_{\boldsymbol{q}_{j-1}}, S^1_{\boldsymbol{q}_j}$ は角度 $\alpha_j$ で交わる．$\boldsymbol{q}_{j-1}\boldsymbol{q}_j$ の $\mu(P, \boldsymbol{w})$ への寄与は $\boldsymbol{w}$ が角度 $\alpha_j$ に対応する領域（面積 $4\pi \times \frac{\alpha_j}{\pi}$）内にあるときは 1，角度 $\pi - \alpha_j$ に対応する領域内にあるときは 0 である．よって

$$\int_{\boldsymbol{w} \in S^2} 2\mu(P, \boldsymbol{w}) dA = 4 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 4K(P)$$

となり，結果を得る．閉曲線 $\gamma$ が閉折線でないときは，$\gamma$ を適当な閉折線 $P_m$ で近似すればよい．

$$\int_{\boldsymbol{w} \in S^2} \mu(\gamma, \boldsymbol{w}) dA = \lim_{m \to \infty} \mu(P_m, \boldsymbol{w}) dA = \lim_{m \to \infty} 2K(P_m) = K(\gamma)$$

$\mu(\gamma) \leq \mu(\gamma, \boldsymbol{w}) \leq \bar{\mu}(\gamma)$ を $S^2$ 上で積分すれば系を得る．　□

**定義 1.7.12（イソトピー）**　$\gamma_i : S^1 \to \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2)$ に対し，$\gamma_1$ と $\gamma_2$ がイ

ソトープであるとは，次を満たす連続写像 $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ が存在するときをいう．

(1) $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$

(2) すべての $t \in [0,1]$ に対し，$H_t : S^1 \to \mathbb{R}^3$ $(s \mapsto H_t(s) = H(s,t))$ は単射かつ微分可能で $\frac{\partial H}{\partial s}(s,t) \neq 0$.

写像 $H$ を**イソトピー** (isotopy) と呼ぶ[11].

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\gamma)$ で $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ とイソトープな閉曲線全体を表す.

**定理 1.7.13**　$\mu(\mathcal{C}) = \min\{\mu(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}\}$ とおけば,

$$2\pi\mu(\mathcal{C}) = \inf\{K(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}\}$$

**証明**　$2\pi\mu(\mathcal{C}) \geq \inf\{K(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}\}$ は明らかなので，逆向きの不等号を示せばよい．$\gamma \in \mathcal{C}$, $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{w} \in S^2$ を $\mu(\gamma, \boldsymbol{w}) = \mu(\mathcal{C})$ なるようにとる．$\gamma$ を閉折線 $P$ で近似する．$\boldsymbol{w} = (0,0,1)$ としてよい．

$$\phi_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (ux, uy, z)$$

とおけば，$\gamma_u = \phi_u \circ \gamma$ $(0 < u \leq 1)$ は $\gamma$ とイソトープである．$\gamma$ が閉折線 $P$ のとき，$\gamma_u$ も閉折線 $P_u$ である．$P_u$ の頂点を $\boldsymbol{p}_1^u, \cdots, \boldsymbol{p}_m^u$ とすれば，（測度 0 の $\boldsymbol{w} \in S^2$ を除いて）次のいずれかが成立する．

(a) $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j-1}^u < \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_j^u < \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j+1}^u$　　(b) $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j-1}^u > \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_j^u > \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j+1}^u$

(c) $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j-1}^u < \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_j^u > \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j+1}^u$　　(d) $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j-1}^u > \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_j^u < \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{j+1}^u$

(c) を満たす $j$ の個数は (d) を満たす $j$ の個数に等しく，$\mu(\gamma)$ 個である．$\alpha_j^u = \angle(\boldsymbol{p}_j^u - \boldsymbol{p}_{j-1}^u, \boldsymbol{p}_{j+1}^u - \boldsymbol{p}_j^u)$ とおくと，(c) または (d) を満たす $j$ については $\lim_{u\to 0} \alpha_j^u = \pi$ であり[12]，(a) または (b) を満たす $j$ については $\lim_{u\to 0} \alpha_j^u = 0$ である[13]．よって

$$2K(P^u) = \int_{\boldsymbol{w} \in S^2} \mu(P^u, \boldsymbol{w}) dA \to 4\pi\mu(\gamma) = 4\pi\mu(\mathcal{C}) \qquad \square$$

[11] isotopy の訳語はイソトピーで定着していると思うが，アイソトピーと呼ぶ人もいるであろう．

[12] 大円弧 $\boldsymbol{q}_{j-1}^u \boldsymbol{q}_j^u$ は赤道に交わり，$u \to 0$ のとき $\boldsymbol{q}_{j-1}^u$，$\boldsymbol{q}_j^u$ の一方が北極，他方が南極に近づく．

[13] $u \to 0$ のとき $\boldsymbol{q}_{j-1}^u$，$\boldsymbol{q}_j^u$ は同じ極に近づく．

定理 1.7.10, 1.7.13 はミルナーによって証明された．最後の定理より，ほどけない空間閉曲線の全曲率は $4\pi$ 以上であることがわかる．この事実は**ファリィ・ミルナー** (Fáry-Milnor) **の定理**としてしばしば参照される．

### 1.7.4 ガウスの絡み目積分

2 つの空間閉曲線 $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^3$, $\beta : S^1 \to \mathbb{R}^3$ が互いに交わらないとする．$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$，$D$ の境界 $\partial D$ を $S^1$ として $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x}|_{S^1} = \alpha$ となるものをとる．$\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^3$ は $\alpha$ を境界にする膜[14]であるが，このような $\boldsymbol{x}$ は任意の $\alpha$ に対して存在することが知られている．

**定理 1.7.14 (ガウスの絡み目積分)** $\boldsymbol{x}(D)$ と $\beta(S^1)$ の共通部分が有限個の点 $P_1, \cdots, P_m$ であるとし，$\beta(S^1)$ と $\boldsymbol{x}(D)$ が各点 $P_i$ で横断的に交わるとする．$\boldsymbol{x}(D)$ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v)/|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|$ と書く[15]とき，$\beta(t)$ が $P_i$ で $\boldsymbol{x}(D)$ を $\boldsymbol{\nu}(P_i)$ と同じ向きに通過するときは正の交点，$\boldsymbol{\nu}(P_i)$ と逆向きに通過するときは負の交点とする．正の交点の個数を $m^+$ 個，負の交点の個数を $m^-$ 個とするとき，

$$m^+ - m^- = \frac{1}{4\pi}\int_{S^1}\int_{S^1} \frac{\det(\beta(t) - \alpha(s)\ \beta'(t)\ \alpha'(s))}{|\beta(t) - \alpha(s)|^3} ds\, dt$$

が成り立つ．

ガウス (Gauss) は 1833 年 1 月 22 日の日記でこの積分値について述べている．この値を空間曲線 $\alpha$ と $\beta$ の**絡み目数**といい，$L(\alpha, \beta)$ で表す．右辺の積分は $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^3$ の選び方によらないので，$m^+$, $m^-$ は $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^3$ に依存するが，その差 $m^+ - m^-$ は $\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{R}^3$ の選び方によらないことがわかる．また，右辺の積分は $\alpha$ と $\beta$ を入れ替えても変わらないので，$L(\alpha, \beta) = L(\beta, \alpha)$ もわかる．

**証明** $P_i = \boldsymbol{x}(u_i, v_i) = \beta(t_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ とし，$(u_i, v_i, t_i)$ 中心の小球

$$B_i(\varepsilon) = \{(u, v, t) \in D \times S^1 : (u - u_i)^2 + (v - v_i)^2 + (t - t_i)^2 < \varepsilon^2\}$$

を互いに交わらないように，また $S^1 \times S^1$ とも交わらないようにとる．点 $P_i$

[14] ザイフェルト (Seifert) の膜という．

[15] 2.2.3 節参照．

を始点とする $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\boldsymbol{\nu}^i$, $\boldsymbol{e}_1^i$, $\boldsymbol{e}_2^i$ をとり，$(u,v,t) \in B_i(\varepsilon)$ に対し

$$\boldsymbol{x}_\varepsilon(u,v) = P_i + (u-u_i)\boldsymbol{e}_1^i + (y-y_i)\boldsymbol{e}_2^i, \qquad \beta_\varepsilon(t) = P_i \pm (t-t_i)\boldsymbol{\nu}^i$$

を満たす $\boldsymbol{x}(u,v)$, $\beta(t)$ の連続微小変形 $\boldsymbol{x}_\varepsilon(u,v)$, $\beta_\varepsilon(t)$ をとる．ここで

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{x}_\varepsilon(u,v) = \boldsymbol{x}(u,v), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon(t) = \beta(t), \qquad \boldsymbol{x}_\varepsilon|_{S^1} = \boldsymbol{x}|_{S^1}$$

としておく．さて，次で定まる写像 $\varPhi_\varepsilon$ を考える．

$$\varPhi_\varepsilon : (D\times S^1)\setminus\bigcup_{i=1}^m B_i(\varepsilon) \to S^2, \quad (u,v,t)\mapsto \frac{\beta_\varepsilon(t)-\boldsymbol{x}_\varepsilon(u,v)}{|\beta_\varepsilon(t)-\boldsymbol{x}_\varepsilon(u,v)|}$$

$(u,v,t)\in\partial B_i(\varepsilon)$ ならば，

$$\varPhi_\varepsilon(u,v,t) = \frac{1}{\varepsilon}[\pm(t-t_i)\boldsymbol{\nu} - (u-u_i)\boldsymbol{e}_1 - (v-v_i)\boldsymbol{e}_2]$$

なので $S^2$ の面積要素[16] $dA$ を $\varPhi_\varepsilon$ で引き戻して $\partial B_i(\varepsilon)$ に制限すると，

$$\begin{aligned}
&\varPhi_\varepsilon^* dA|_{\partial B_i(\varepsilon)} \\
&= -\frac{u-u_i}{\varepsilon}d\Big(-\frac{v-v_i}{\varepsilon}\Big)\wedge d\Big(\pm\frac{t-t_i}{\varepsilon}\Big) \\
&-\ \frac{v-v_i}{\varepsilon}d\Big(\pm\frac{t-t_i}{\varepsilon}\Big)\wedge d\Big(-\frac{u-u_i}{\varepsilon}\Big) \pm \frac{t-t_i}{\varepsilon}d\Big(-\frac{u-u_i}{\varepsilon}\Big)\wedge d\Big(-\frac{v-v_i}{\varepsilon}\Big) \\
&= \pm\Big[\frac{u-u_i}{\varepsilon}\frac{dv}{\varepsilon}\wedge\frac{dt}{\varepsilon} + \frac{v-v_i}{\varepsilon}\frac{dt}{\varepsilon}\wedge\frac{du}{\varepsilon} + \frac{t-t_i}{\varepsilon}\frac{du}{\varepsilon}\wedge\frac{dv}{\varepsilon}\Big] \\
&= \pm\frac{1}{\varepsilon^2}dA_i
\end{aligned}$$

を得る．ここで $dA_i$ は半径 $\varepsilon$ の球面 $\partial B_i(\varepsilon)$ の面積要素で，

$$dA_i = \frac{1}{\varepsilon}[(u-u_i)dv\wedge dt + (v-v_i)dt\wedge du + (t-t_i)du\wedge dv]$$

で表される．よって，

$$\iint_{\partial B_i(\varepsilon)}\varPhi_\varepsilon^* dA = \pm\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_i(\varepsilon)} dA_i = \pm\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = \pm 4\pi$$

を得る．これよりまず次式がわかる．

---

[16]例 2.2.2 参照．

$$4\pi(m^+ - m^-) = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\partial B_i(\varepsilon)} \Phi_\varepsilon^* dA \tag{1.7.2}$$

$\phi(s,t) = \Phi_\varepsilon(\cos s, \sin s, t) = \frac{\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|}$ とおいて，計算すると，

$$\begin{aligned}\det(\phi(s,t)\ \phi_t(s,t)\ \phi_s(s,t)) &= \det\left(\tfrac{\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|}\ \tfrac{-\alpha'(s)}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|}\ \tfrac{\beta_\varepsilon'(t)}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|}\right) \\ &= \frac{\det(\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)\ \beta_\varepsilon'(t)\ \alpha'(s))}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|^3}\end{aligned}$$

なので，注意 2.2.1 を考慮して $S^2$ の面積要素 $dA$ を $\phi$ で引き戻すと次を得る．

$$\iint_{S^1\times S^1} \Phi_\varepsilon^* dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\det(\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)\ \beta_\varepsilon(t)\ \alpha(s))}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|^3} ds\,dt \tag{1.7.3}$$

$S^2$ 上では $x^2+y^2+z^2=1$ なので $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$．$S^2$ の面積要素は $dA = (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)|_{S^2}$ なので，$d(dA) = (dx\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dz\wedge dx + dz\wedge dx\wedge dy)|_{S^2}$ であるが関係式 $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$ を用いると $d(dA)=0$ がわかる[17]．$d(\Phi_\varepsilon^*(dA)) = \Phi_\varepsilon^*(d(dA)) = 0$ なのでストークスの定理より，

$$0 = \iiint_{(D\times S^1)\setminus\cup_{i=1}^m B_i(\varepsilon)} d(\Phi^* dA) = \iint_{S^1\times S^1} \Phi_\varepsilon^*\omega - \sum_{i=1}^{m}\iint_{\partial B_i(\varepsilon)} \Phi^* dA$$

となるが，これを書き換えると

$$\iint_{S^1\times S^1} \Phi_\varepsilon^* dA = \sum_{i=1}^{m}\iint_{\partial B_i(\varepsilon)} \Phi_\varepsilon^* dA$$

を得る．式 (1.7.2), (1.7.3) より，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\det(\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)\ \beta_\varepsilon(t)\ \alpha(s))}{|\beta_\varepsilon(t)-\alpha(s)|^3} ds\,dt = 4\pi(m^+ - m^-)$$

となり，$\varepsilon\to 0$ とすれば証明を完了する．　□

### 1.7 節の演習

**演習 1.7.1**　次の曲線の曲率と振率を求めよ．ただし $a, b$ は定数で $a>0$ とする．

[17] $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$, $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$, $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$, $dz\wedge dx = -dx\wedge dz$ に注意.

(1) $x = a\cosh t,\ y = a\sinh t,\ z = bt$

(2) $x = a^2 t,\ y = at^2/2,\ z = t^3/6$

(3) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = ae^t$

**演習 1.7.2**　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ とする．曲線 $\gamma : I \to S^2$ について，$s$ を弧長変数とし $\boldsymbol{e} = \gamma'$, $\boldsymbol{m} = \gamma \times \boldsymbol{e}$, $\kappa_s = \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{m} \rangle$ とおけば，次が成り立つことを示せ．

$$\begin{pmatrix} \gamma' \\ \boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{m}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_s \\ 0 & -\kappa_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$$

**演習 1.7.3**　曲率，捩率が0でない空間曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ が球面曲線（ある点 $\boldsymbol{a}$ について $|\gamma - \boldsymbol{a}|$ が定数なる曲線）であるための必要十分条件は次で与えられることを示せ．

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0 \tag{1.7.4}$$

**演習 1.7.4**　曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の接ベクトルが定ベクトル $\boldsymbol{w}$ と常に一定角をなすとき，**定傾曲線**であるという．曲率 $\kappa$ が正の曲線については，定傾曲線であることは $\tau/\kappa$ が定数であることと同値であることを示せ．

**演習 1.7.5**　空間曲線 $\gamma$ を単位定ベクトル $\boldsymbol{w}$ に直交する平面に正射影して得られる平面曲線を $\alpha$ とする．$\alpha = \gamma - \langle \gamma, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{w}$ と表せる．

(1) $\alpha$ の弧長変数を $\sigma$ とするとき $d\sigma/ds = \sin\theta$ を示せ．ただし，$s$ は $\gamma$ の弧長変数で，$\boldsymbol{w}$ と $\gamma$ の単位接ベクトルのなす角を $\theta$ としている．

(2) $\alpha$ の曲率は $\kappa\cos\phi/\sin^3\theta$ であることを示せ．ただし，$\kappa$ は $\gamma$ の曲率で，$\boldsymbol{w}$ と $\gamma$ の単位従法線ベクトルとなす角を $\phi$ としている．

**演習 1.7.6**　点 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{p}_0$ を順に線分でつないで得られる閉折線を $P$ とし，$P$ の頂点から $\boldsymbol{p}_i$ を除いて得られる閉折線（すなわち点 $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{p}_{i-1}$, $\boldsymbol{p}_{i+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{p}_m$ を順につないで得られる閉折線）を $P'$ とするとき，$K(P') \leq K(P)$ を示せ．

# 第2章

# 曲　面

曲面を研究対象として認識し目覚ましい結果を残したのは，おそらくガウスが最初であろう．本章では，曲率をキーワードに曲面の基礎事項を解説する．位置ベクトルの偏微分の計算が鍵だが，偏微分の階数が上がるたびに，計算は面倒になる．計算の確認も大事であるが，大づかみにアイデアを把握して，方向を見失わないようにして欲しい．ガウス・ボンネの定理を示すことが目標となるが，測地的極座標という，よい座標をとって計算することのご利益も味わって欲しい．

## 2.1　曲面の定義と例

日常では，曲面とは曲がった面を意味するが，数学では平面も平らな曲面として，曲面の特別な場合と見なす．

**■ 曲面の径数表示**　$U$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．$C^\infty$ 写像

$$\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$$

の像は $\mathbb{R}^3$ の曲面を表すと考えられる．一般に曲面を考える際，$(u, v)$ を $\mathbb{R}^2$ の座標としたとき，$\boldsymbol{x}$ が単射で，$\boldsymbol{x}$ の偏微分 $\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ が $U$ の各点で 1 次独立であるという条件を課すことが多い．

偏微分 $\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$，$\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$ が 1 次独立であるとき $(u_0, v_0)$ は曲面の**正則点**を表すといい，偏微分 $\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0), \boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$ が 1 次従属であるとき $(u_0, v_0)$ は曲面の**特異点**を表すという．

**■ 曲面の陰関数表示**　$f(x, y, z)$ を 3 変数の関数とし，$\mathbb{R}^3$ 内で $f(x, y, z) = 0$

で表される集合

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

を考える．点 $P \in S$ で偏微分 $f_x$, $f_y$, $f_z$ のいずれかが 0 でなければ，陰関数定理より，その近傍で $S$ は滑らかな曲面を表すと考えられる．例えば $f_z \neq 0$ ならば，考えている点の近傍で $f(x, y, z) = 0$ により $z$ を $x, y$ の関数と見ることができる．その関数を $\varphi(x, y)$ と書けば，$f(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$ であり，$(u, v) \mapsto (u, v, \varphi(u, v))$ が曲面の径数表示を与える．

$$(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)) \neq (0, 0, 0)$$

を満たす点 $(x_0, y_0, z_0) \in S$ を $S$ の**正則点**といい，

$$(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)) = (0, 0, 0)$$

を満たす点 $(x_0, y_0, z_0) \in S$ を $S$ の**特異点**という．

多項式 $f(x, y, z)$ をとり，$f(x, y, z) = 0$ で定義される曲面を**代数曲面** (algebraic surface) という．後述の 2 次曲面や回転トーラスは代数曲面であるが，代数曲面でない曲面ももちろんある．

**■ 関数のグラフとしての曲面**　2 変数関数 $f(x, y)$ があったとき，そのグラフ $z = f(x, y)$ は曲面を与える．この曲面は，径数表示 $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ と，定義方程式 $z - f(x, y) = 0$ をもつ．

**■ 曲面の例**

**例 2.1.1（2 次元単位球面）**　$\mathbb{R}^3$ の原点からの距離が 1 であるような点全体を 2 次元単位球面といい，$S^2$ で表す．すなわち，

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

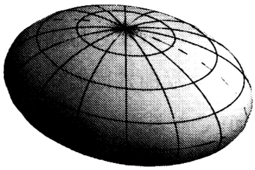
**例 2.1.2（2 次曲面）**　$\mathbb{R}^3$ の 2 次曲面 (quadric surface) にはそれぞれ固有の名前がついている．それらを紹介しよう．$a$, $b$, $c$ を正の定数とする．

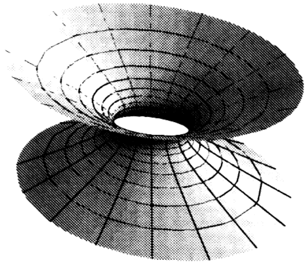
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$$

を**楕円面**という．

$a, b, c$ が相異なるとき**3 軸楕円面**といい，2 つが一致するとき**回転楕円面**という．$a, b, c$ がすべて一致するときは球面である．

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\} \qquad \text{を}\textbf{一葉双曲面},$$

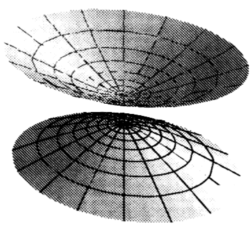

3 軸楕円面

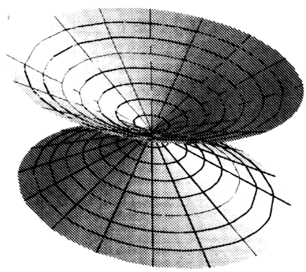

一葉双曲面

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\} \qquad \text{を}\textbf{二葉双曲面},$$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0\right\} \qquad \text{を}\textbf{2 次錐面}$$

という．

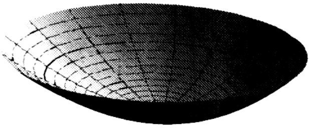

二葉双曲面


2 次錐面

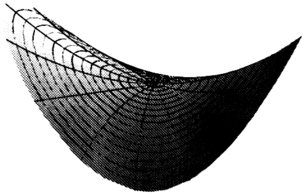
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right\} \qquad \text{を}\textbf{楕円放物面},$$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right\} \qquad \text{を}\textbf{双曲放物面}$$

という．



楕円放物面



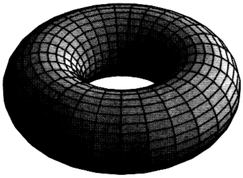
双曲放物面

$Q(x,y)$ を $x,y$ の 2 次式とするとき曲面 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x,y)=0\}$ を 2 次柱面という．$Q(x,y)=0$ が，$xy$ 平面に楕円を定めるときは楕円柱面，放物線を定めるときは放物柱面，双曲線を定めるときは双曲柱面という．

2 次曲面は線形代数を使って分類することができる．3 次曲面 (cubic surface) も同様に分類してみようというのは自然な考えであるが，実行するのはかなり大変である．Google などの検索エンジンで「cubic surface」をキーワードに検索してみると，3 次曲面の解説やその美しいグラフィックイメージを見付けることができる．

**例 2.1.3（回転トーラス）** $xz$ 平面の円 $(x-a)^2+z^2=b^2$ を $z$ 軸の周りに回転させて得られる曲面を考えよう．径数表示は

$$(u,v) \mapsto ((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ \sin u)$$



で与えられる．陰関数表示は $x^2+y^2=(a+b\cos u)^2$ と $z=\sin u$ から $u$ を消去して得られる．

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+b^2z^2=b^2$$

**例 2.1.4（回転面）** $s$ を径数とする $xz$ 平面の曲線 $(x(s),0,z(s))$ を $z$ 軸の周りに回転させて得られる曲面は

$$\boldsymbol{x}(s,\theta)=(x(s)\cos\theta,\ x(s)\sin\theta,\ z(s)) \tag{2.1.1}$$

で表される．特に，関数 $x=f(z)$ のグラフを $z$ 軸の周りに回転させて得られる曲面は次式で表される．

$$\boldsymbol{x}(z,\theta)=(f(z)\cos\theta,\ f(z)\sin\theta,\ z) \tag{2.1.2}$$

**例 2.1.5（管（チューブ））** $s$ を弧長変数とする空間曲線 $\gamma(s)$ から一定の距離 $r$ にある点全体は管（チューブ）と呼ばれる曲面である．曲線 $\gamma(s)$ の主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$，従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$\boldsymbol{x}(s,\theta)=\gamma(s)+r(\cos\theta\boldsymbol{n}+\sin\theta\boldsymbol{b})$$

で表せる．回転トーラス（例 2.1.3）は回転面でありかつ管である．

**定義 2.1.6（線織面）** 直線が動いて得られる曲面を**線織面** (ruled surface) という．$\gamma(u)$, $\delta(u)$ を空間曲線として次式で表される曲面である．

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\gamma(u)+v\delta(u)$$

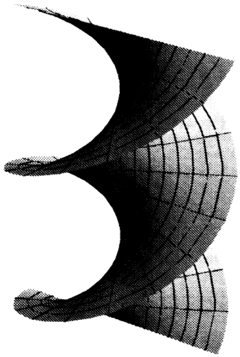
**例 2.1.7（常螺旋面（ヘリコイド））**

$$\boldsymbol{x}(u,v)=(v\cos u, v\sin u, au)$$

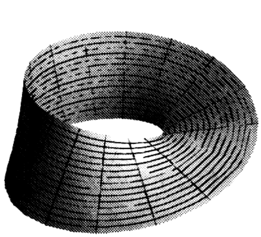
**例 2.1.8（メビウス (Möbius) の帯）**

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\left(\left(2+v\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,\ \left(2+v\cos\frac{u}{2}\right)\sin u,\ v\sin\frac{u}{2}\right)$$

定義域を $[0,2\pi]\times[-1,1]$ としたときの絵を示す．



常螺旋面

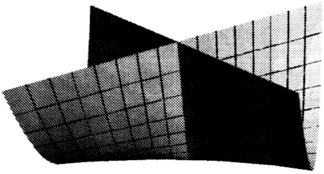


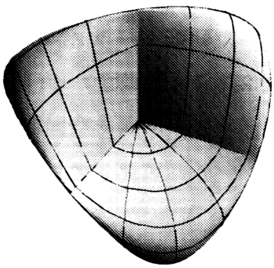
メビウスの帯

**例 2.1.9（ホイットニーの傘，交差帽子）** 次の写像の像は**ホイットニーの傘**または**交差帽子**と呼ばれる曲面である．

$$\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$$

$\boldsymbol{x}_u = (1, v, 0)$, $\boldsymbol{x}_v = (0, u, 2v)$ なので $(u, v) \neq (0, 0)$ であれば $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ は1次独立であるが，$(u, v) = (0, 0)$ のときは $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ は1次従属．


ホイットニーの傘


ローマ曲面

**例 2.1.10（ローマ曲面）**　写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (yz, xz, xy)$ による単位球面 $S^2$ の像をローマ曲面[1]という．この曲面は $y^2z^2+x^2z^2+z^2y^2-xyz = 0$ と陰関数表示[2]され，次で径数表示される．

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi,\ \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi)$$

■ **高次元の図形**　幾何学では，高次元の図形も考えることがある．高次元の図形の例として，高次元の球を挙げておく．

**例 2.1.11（$n$ 次元の球）**

$$S^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

## 2.1 節の演習

**演習 2.1.1**　例 2.1.2 の2次曲面は次のような径数付けをもつことを示せ．

- 3軸楕円面 $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\sin v$, $c = \sin u$
- 一葉双曲面 $x = a\cosh v\cos u$, $b = \cosh v\sin u$, $z = c\sinh v$

---

[1] シュタイナー (J. Steiner) がローマ滞在中にこの曲面を研究したのでこの名がある．

[2] この式の零点集合には $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸も含んでしまうので，正確にはローマ曲面と3つの軸の和集合が表示される．

- 二葉双曲面 $x = a\sinh v\cos u,\ b = \sinh v\sin u,\ z = \pm c\cosh v$
- 2 次錐面 $x = av\cos u,\ y = bv\sin u,\ z = cv$

**演習 2.1.2**　次の曲面は代数曲面かどうか判定せよ．回転トーラス（例 2.1.3），常螺旋面（例 2.1.7），メビウスの帯（例 2.1.8），ホイットニーの傘（例 2.1.9）．

**演習 2.1.3**　2 次曲面（例 2.1.2）のうち線織面となるものはどれか．

**演習 2.1.4**　常螺旋面（例 2.1.7），メビウスの帯（例 2.1.8），ホイットニーの傘（例 2.1.9）は線織面であることを示せ．

## 2.2　1 階偏微分と第 1 基本形式

**■ 準備**　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ に対し，内積 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$（または $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$）を

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$
$$\boldsymbol{v}_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

で定める．これは通常の内積で，双線形性 (1.2.1) と正値性 (1.2.2) が成立する．$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$, $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$ となるのも 2 変数の場合と同様である．

$U$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし $C^1$ 関数 $f(x, y)$ を考える．$(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ を $U$ で定義された変数の変換としたとき，次が成立する．

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

よって

$$f_u du + f_v dv = f_x dx + f_y dy$$

であり，$f_x dx + f_y dy$ は座標の取り方によらない．これを $f$ の**外微分**といい，$df$ で表す．

### 2.2.1　第 1 基本形式

$U$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，曲面 $S$ の径数表示

$$\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3, \qquad (u,v) \mapsto \boldsymbol{x}(u,v)$$

を考える．このとき，これを $u, v$ で偏微分して得られるベクトル $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ は点 $\boldsymbol{x}$ を始点としてそこで曲面に接するベクトルと考えられる．ここで次に注意する．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{x}(u,v)|^2 &\sim |\boldsymbol{x}_u \Delta u + \boldsymbol{x}_v \Delta v|^2 \\ &= E\Delta u^2 + 2F\Delta u\Delta v + G\Delta v^2\end{aligned}$$

ただし，$E = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u$, $F = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v$, $G = \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v$.

次の対称微分形式を**第 1 基本形式** (the first fundamental form) と呼ぶ．

$$I = E\,du^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv$ なので，

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv) \cdot (\boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv) \\ &= \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u du^2 + 2\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v\, du\, dv + \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v dv^2\end{aligned}$$

となり $I = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x}$ を得る．この式は，第 1 基本形式は座標変換で不変であることを示している．

■ **曲線の弧長**　$\gamma(t)$ を曲面上の曲線，$s$ を弧長変数とすると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\gamma'(t)|^2 &= \left|\frac{du}{dt}\boldsymbol{x}_u + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{x}_v\right|^2 \\ &= E\Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{du}{dt} + G\Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2\end{aligned}$$

となる．形式的に分母を払うと，

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

となるので，第 1 基本形式を $ds^2$ と書くこともある．

### 2.2.2　曲面の接ベクトルと内積

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$ は，始点を曲面 $S$ 上の点 $P\ =$

$\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ にとれば，この点で曲面に接しているベクトルと考えることができる．$\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$ の 1 次結合で表されるベクトル

$$\boldsymbol{v} = a\,\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0) + b\,\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0) \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{2.2.1}$$

を曲面の点 $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ での**接ベクトル** (tangent vector) という．点 $P$ での接ベクトル $\boldsymbol{v}$ 全体はベクトル空間をなす．このベクトル空間を曲面 $S$ の点 $P$ での**接空間**といい，$T_PS$ で表す．

$\boldsymbol{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ と書いたとき，平面のベクトル $(a, b)$ のヤコビ行列の定める線形写像

$$J\boldsymbol{x}_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \\ z_u(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

の像全体 $J\boldsymbol{x}_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2)$ が接空間 $T_PS$ である．始点が異なる接ベクトルは足し合わせることができないので，混乱を避けるために始点 $P$ を明記して，接ベクトルを $\boldsymbol{v}_P$ と書くこともある．ここでは煩雑を避けるため，添字 $P$ を略している．

$(u, v)$ 平面のベクトルで $u$ 軸方向の単位ベクトルを $\partial_u$，$v$ 軸方向の単位ベクトルを $\partial_v$ と書けば，これらは方向微分として関数に作用し，各成分への作用と見れば $\boldsymbol{x}$ にも作用する．よって式 (2.2.1) は $(a\partial_u + b\partial_v)\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ とも表せる．

接ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さ $|\boldsymbol{v}|$ は

$$|\boldsymbol{v}|^2 = E\,a^2 + 2F\,ab + N\,b^2$$

で表される．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ があったとき，その内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 &= (a_1\boldsymbol{x}_u + b_1\boldsymbol{x}_v) \cdot (a_2\boldsymbol{x}_u + b_2\boldsymbol{x}_v) \\ &= E\,a_1b_1 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + G\,b_1b_2 \\ &= (a_1\ b_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で表される．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ のなす角度を $\theta$ とすれば

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = |\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2| \cos\theta$$

を満たす．よって第 1 基本形式によって，接ベクトルの長さ，2 つの接ベクトルの内積，角度が定まる．

### 2.2.3　面積要素と単位法ベクトル

**■ 面積要素**　曲面 $S$ が径数表示 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ で与えられているとき，$\boldsymbol{x}(U)$ の面積は次の積分で与えられる．

$$\iint_U |\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| du\, dv$$

この積分の中身 $|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| du\, dv$ を**面積要素** (area element) といい，$dA$ で表す．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| &= |\boldsymbol{x}_u||\boldsymbol{x}_v||\sin\theta| = |\boldsymbol{x}_u||\boldsymbol{x}_v|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= |\boldsymbol{x}_u||\boldsymbol{x}_v|\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u||\boldsymbol{x}_v|}\right)^2} \\
&= \sqrt{|\boldsymbol{x}_u|^2|\boldsymbol{x}_v|^2 - (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v)^2} = \sqrt{EG-F^2}
\end{aligned}$$

に注意しておく．

**■ 単位法ベクトル**　曲面の単位法ベクトルは次で与えられる．

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|}\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v$$

単位法ベクトルとして $-\boldsymbol{\nu}$ をとることもできるが，上のように $\boldsymbol{\nu}$ を定めると $|\boldsymbol{x}_u\ \boldsymbol{x}_v\ \boldsymbol{\nu}| > 0$ となる．

**■ 面積要素の解釈**　曲面 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ の接ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{x}_u + b_1\boldsymbol{x}_v$, $\boldsymbol{v}_2 = a_2\boldsymbol{x}_u + b_2\boldsymbol{x}_v$ の作る平行 4 辺形の面積は行列式 $|\boldsymbol{\nu}\quad \boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2|$ である．これは符号付き面積であり，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を入れ替えると符号が変わる．この行列式

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\nu}\quad \boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2| &= |\boldsymbol{\nu}\quad a_1\boldsymbol{x}_u + b_1\boldsymbol{x}_v\quad a_2\boldsymbol{x}_u + b_2\boldsymbol{x}_v| \\ &= |\boldsymbol{\nu}\quad \boldsymbol{x}_u\quad \boldsymbol{x}_v|(a_1b_2 - a_2b_1) = \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\rangle(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \left\langle \frac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \right\rangle (a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= |\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|(a_1b_2 - a_2b_1) = \sqrt{EG - F^2}(a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned}$$

が面積要素 $dA$ の実質的正体であり，しばしば次のように書く．

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$$

$du \wedge dv$ は，$\boldsymbol{v}_i = a_i\partial_u + b_i\partial_v$ $(i = 1, 2)$ として，次で定まる双一次形式である．

$$(du \wedge dv)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} du(\boldsymbol{v}_1) & du(\boldsymbol{v}_2) \\ dv(\boldsymbol{v}_1) & dv(\boldsymbol{v}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{2.2.2}$$

なお $du(a\partial_u + b\partial_v) = a$, $dv(a\partial_u + b\partial_v) = b$ としている．$dv \wedge du = -du \wedge dv$ である．式 (2.2.2) はベクトル $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ の作る平行 4 辺形の符号付き面積であることを思い出すと，$\sqrt{EG - F^2}$ は，微小平行 4 辺形を $\boldsymbol{x}$ で $\mathbb{R}^3$ に送り込むときの面積の拡大率と解釈できる．さらに言えば，面積要素は曲面に**向き**を定めると解釈できる．単位法ベクトルの向きが曲面に向きを定めるのである．どんな曲面も局所的には向きを定義できるが，メビウスの帯のように大域的には向き付けられない曲面もある．向きが与えられた曲面を有向曲面という．

自然数 $n$ に対し，$\frac{1}{n}\boldsymbol{v}_1$, $\frac{1}{n}\boldsymbol{v}_2$ の作る平行 4 辺形の符号付き面積は次のようになる．

$$|\boldsymbol{\nu}\quad \tfrac{1}{n}\boldsymbol{v}_1\quad \tfrac{1}{n}\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{EG - F^2}\,\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n^2}$$

よって例えば，有向曲面 $\boldsymbol{x} : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ の面積は次式で与えられる．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|\boldsymbol{\nu}\quad \tfrac{1}{n}\boldsymbol{x}_u\quad \tfrac{1}{n}\boldsymbol{x}_v|_{(i/n,j/n)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{EG-F^2}(\tfrac{i}{n},\tfrac{j}{n})\frac{1}{n^2}$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \sqrt{EG-F^2}du\,dv$$

**注意 2.2.1**　曲面 $S$ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$，曲面の接ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ と書くとき，

$$|\boldsymbol{\nu}\quad \boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2| = \nu_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \nu_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \nu_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

なので，面積要素 $dA$ は次のように表すことができる．

$$dA = \nu_1 dy\wedge dz + \nu_2 dz\wedge dx + \nu_3 dx\wedge dy$$

**例 2.2.2**　球面 $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ の点 $(x,y,z)$ での単位法ベクトルは $\boldsymbol{\nu} = (x,y,z)$ で与えられるので，面積要素 $dA$ は次で与えられる．

$$dA = (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)|_{S^2}$$

点 $(a,b,c)$ を中心とする半径 $r$ の球面 $S$ の点 $(x,y,z)$ での単位法ベクトルは $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{r}(x-a, y-a, z-a)$ で与えられるので，球面 $S$ の面積要素は

$$\frac{1}{r}[(x-a)dy\wedge dz + (y-b)dz\wedge dx + (z-c)dx\wedge dy]|_S$$

で与えられる．

### 2.2 節の演習

**演習 2.2.1**　回転トーラス（例 2.1.3）の第 1 基本形式と表面積を求めよ．

**演習 2.2.2**　回転面（例 2.1.4）の第 1 基本形式と表面積を求めよ．

**演習 2.2.3**　管（例 2.1.5）の第 1 基本形式と表面積を求めよ．

**演習 2.2.4**　2 つの接ベクトルが 2 次形式 $P\,du^2 + 2Q du\,dv + R\,dv^2 = 0$ の解であるとき，そのなす角 $\theta$ は次を満たすことを示せ．

$$\tan\theta = \frac{2(EG-F^2)^{1/2}(Q^2-PR)^{1/2}}{EP-2FQ+GR}$$

## 2.3　2 階偏微分と第 2 基本形式

$\boldsymbol{x}$ の 2 階偏微分を接空間の基底 $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ と単位法ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の 1 次結合として次のように表す.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{uu} &= \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{x}_v + L\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{x}_{uv} &= \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{x}_{vv} &= \Gamma^u_{vv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{x}_v + N\boldsymbol{\nu} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

ここで $\Gamma^u_{uu}$, $\Gamma^u_{uv}$, $\Gamma^u_{vv}$, $\Gamma^v_{uu}$, $\Gamma^v_{uv}$, $\Gamma^v_{vv}$, $L$, $M$, $N$ は $(u,v)$ の関数である. $\Gamma^u_{uu}$, $\Gamma^u_{uv}$, $\Gamma^u_{vv}$, $\Gamma^v_{uu}$, $\Gamma^v_{uv}$, $\Gamma^v_{vv}$ を**クリストッフェル** (Christoffel) **記号**という.

$$L = \boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu}, \qquad M = \boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu}, \qquad N = \boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

に注意しておこう. $\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$, $\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ を微分して得られる式

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u = 0, \qquad &\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v = 0 \\ &\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u = 0, \qquad &\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v = 0 \end{aligned}$$

より, 次もわかる.

$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u \\ M &= \boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v = -\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u \\ N &= \boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v \end{aligned}$$

### 2.3.1　第 2 基本形式

$L$, $M$, $N$ を係数とする 2 次の対称微分形式

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$$

を**第 2 基本形式** (the second fundamental form) という. $\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$, $\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ より,

$$d\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_u \cdot d\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad d\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_v \cdot d\boldsymbol{\nu} = 0$$

となるが，$d\boldsymbol{x}_u = L\,du + M\,dv$, $d\boldsymbol{x}_v = M\,du + N\,dv$ なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2 \\
&= \boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu}\,du^2 + 2\boldsymbol{x}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu}\,du\,dv + \boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu}\,dv^2 \\
&= d\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{\nu}\,du + d\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{\nu}\,dv \\
&= -\boldsymbol{x}_u \cdot d\boldsymbol{\nu}\,du - \boldsymbol{x}_v \cdot d\boldsymbol{\nu}\,dv \\
&= -(\boldsymbol{x}_u\,du + \boldsymbol{x}_v dv) \cdot d\boldsymbol{\nu} \\
&= -d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}$$

を得る．この式は，第2基本形式が座標変換で不変であることを示している．

### 2.3.2　共役方向と漸近方向

$(du_1, dv_1)$ と $(du_2, dv_2)$ が互いに他の**共役方向** (conjugate direction) であるとは，次の関係式を満たすときをいう．

$$L\,du_1du_2 + M(du_1dv_2 + du_2dv_1) + N\,dv_1dv_2 = 0$$

接方向 $\boldsymbol{x}_u(u,v)du_2 + \boldsymbol{x}_v(u,v)dv_2$ が $\boldsymbol{\nu}(u + du_1, v + du_1)$ と直交するという条件

$$\boldsymbol{\nu}(u + du_1, v + dv_1) \cdot (\boldsymbol{x}_u(u,v)du_2 + \boldsymbol{x}_v(u,v)dv_2) = 0 \tag{2.3.2}$$

と，テイラーの定理よりわかる関係式

$$\boldsymbol{\nu}(u + du_1, v + dv_1) - \boldsymbol{\nu}(u,v) = \boldsymbol{\nu}_u(u,v)du_1 + \boldsymbol{\nu}_v(u,v)dv_1 + o(du_1, dv_1)$$

より

$$(\boldsymbol{\nu}_u(u,v)du_1 + \boldsymbol{\nu}_v(u,v)dv_1) \cdot (\boldsymbol{x}_u(u,v)du_2 + \boldsymbol{x}_v(u,v)dv_2) = o(du_1, dv_1)$$

がわかる．つまり，$(du_1, dv_1) \to 0$ としたとき，2点 $\boldsymbol{x}(u,v)$, $\boldsymbol{x}(u + du_1, v + dv_1)$ での接平面の交線の極限方向が $\boldsymbol{x}_u du_2 + \boldsymbol{x}_v dv_2$ である．

$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ なる方向 $(du, dv)$ を**漸近方向** (asymptotic direction) という．定義より，漸近方向は自分自身と共役である．

曲面を，ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_u(u,v)du_2 + \boldsymbol{x}_v(u,v)dv_2$ を法ベクトルとする平面に正射影すると，その像の**輪郭** (contour) は式 (2.3.2) を満たす $\boldsymbol{x}(u+du_1, v+dv_1)$ の像となっている．$\boldsymbol{v}$ が漸近方向でなければ，共役方向 $\boldsymbol{x}_u du_1 + \boldsymbol{x}_v dv_1$ は $\boldsymbol{v}$ と平行でない．よって，共役方向の像が輪郭の接方向となる．ベクトル $\boldsymbol{v}$ が漸近方向となる点で，輪郭は一般に特異点をもつ．

### 2.3.3 クリストッフェルの記号

**補題 2.3.1** クリストッフェルの記号 $\Gamma^u_{uu}$, $\Gamma^u_{uv}$, $\Gamma^u_{vv}$, $\Gamma^v_{uu}$, $\Gamma^v_{uv}$, $\Gamma^v_{vv}$ は，第 1 基本形式の係数 $E$, $F$, $G$ とその偏微分を用いて，次のように表される．

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^v_{uu} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma^u_{uv} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma^u_{vv} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

**証明**　まず，次に注意する．

$$\boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{x}_u = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u)_u, \qquad \boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{x}_v = (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v)_u - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u)_v$$
$$\boldsymbol{x}_{uv} \cdot \boldsymbol{x}_u = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u)_v, \qquad \boldsymbol{x}_{uv} \cdot \boldsymbol{x}_v = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v)_u$$
$$\boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{x}_u = (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v)_v - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v)_u, \qquad \boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{x}_v = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v)_u$$

これより，次の関係式を得る．

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E_u &= \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F, & F_u - \tfrac{1}{2}E_v &= \Gamma^u_{uu}F + \Gamma^v_{uu}G \\ \tfrac{1}{2}E_v &= \Gamma^u_{uv}E + \Gamma^v_{uv}F, & \tfrac{1}{2}G_u &= \Gamma^u_{uv}F + \Gamma^v_{uv}G \\ F_v - \tfrac{1}{2}G_u &= \Gamma^u_{vv}E + \Gamma^v_{vv}F, & \tfrac{1}{2}G_v &= \Gamma^u_{vv}F + \Gamma^v_{vv}G \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

これを行列の形に書くと，

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

となるが，これに $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ の逆行列を左からかけて，結果を得る．

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(EG-F^2)} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}$$

□

**補題 2.3.2**　法ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の偏微分に関しては，次の**ワインガルテン** (Weingarten) **の公式**が成立する．

$$\boldsymbol{\nu}_u = -\frac{GL-FM}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u - \frac{EM-FL}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v$$
$$\boldsymbol{\nu}_v = -\frac{GM-FN}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u - \frac{EN-FM}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v$$

**証明**　$\boldsymbol{\nu}_u = a_1\boldsymbol{x}_u + b_1\boldsymbol{x}_v + c_1\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}_v = a_2\boldsymbol{x}_u + b_2\boldsymbol{x}_v + c_2\boldsymbol{\nu}$ とおいて係数を決定すればよい．$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$ を微分して

$$\boldsymbol{\nu}_u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \qquad \boldsymbol{\nu}_v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$$

を得るので $c_1 = c_2 = 0$ がわかる．$\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, $\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ を微分すると，

$$\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u = 0, \qquad \boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u = 0$$
$$\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v = 0, \qquad \boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v = 0$$

を得るので，書き換えると次を得る．

$$L + Ea_1 + Fb_1 = 0, \qquad M + Ea_2 + Fb_2 = 0$$
$$M + Fa_1 + Gb_1 = 0, \qquad N + Fa_2 + Gb_2 = 0$$

これを $a_1, b_1, a_2, b_2$ について解けば証明が終わる．　□

### 2.3 節の演習

**演習 2.3.1**　2.3.2 節の共役方向の説明は古典的なものである．少し現代的な説明を与えよ．具体的には，原点近傍で曲面 $S$ が $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) +$ (高次の項) と表されているとし，ある単位接ベクトル $\boldsymbol{v}$ を法ベクトルとする平面に正射影することを考える．このとき $\boldsymbol{v}$ が漸近方向でなければ $\boldsymbol{v}$ の共役

方向の像が輪郭の接ベクトルとなることを示せ．

**演習 2.3.2**　$F$ が恒等的に 0 のとき，次が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{uu} &= \frac{E_u}{2E},\ \Gamma^v_{uu} = -\frac{E_v}{2G},\ \Gamma^u_{uv} = \frac{E_v}{2E} \\ \Gamma^v_{uv} &= \frac{G_u}{2G},\ \Gamma^u_{vv} = -\frac{G_u}{2E},\ \Gamma^v_{vv} = \frac{G_v}{2G} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

**演習 2.3.3**　曲面 $S$ の接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，$\mathcal{S}(\boldsymbol{v}) = -\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\nu}$ で決まる接空間間の線形写像 $\mathcal{S}$ の固有方程式を求めよ．

**演習 2.3.4**　次を示せ

$$d\boldsymbol{\nu}\cdot d\boldsymbol{\nu} = 2H\ (L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

## 2.4　曲面上の曲線と曲面の曲率

$\gamma(t)$ を曲面上の曲線とする．$\gamma(t)$ の速度ベクトル，加速度ベクトルを基底 $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}$ を用いて表そう．

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt} + \boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} &= \boldsymbol{x}_u\cdot\frac{d^2u}{dt^2} + \boldsymbol{x}_v\cdot\frac{d^2v}{dt^2} + \boldsymbol{x}_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\boldsymbol{x}_{uv}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \boldsymbol{x}_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\Gamma^u_{uu} + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\Gamma^u_{uv} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\Gamma^u_{vv}\right)\boldsymbol{x}_u \\ &\quad + \left(\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\Gamma^v_{uu} + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\Gamma^v_{uv} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\Gamma^v_{vv}\right)\boldsymbol{x}_v \\ &\quad + \left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 L + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}M + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 N\right)\boldsymbol{\nu} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$t$ を弧長径数（$s$ で表す）としたとき，加速度ベクトル $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ は**曲率ベクトル** (curvature vector) と呼ばれ，曲面の接方向と法方向の和として次のように書く．

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \gamma'' = \kappa_g\boldsymbol{n}_g + \kappa_n\boldsymbol{\nu}$$

ここで $\boldsymbol{n}_g$ は曲面の接平面内における曲線 $\gamma$ の単位法ベクトルで $\boldsymbol{n}_g = \boldsymbol{\nu} \times \gamma'$ である[3].

接方向の成分 $\kappa_g \boldsymbol{n}_g$ を**測地的曲率ベクトル**，$\kappa_g$ を**測地的曲率**と呼び[4]，また法方向の成分 $\kappa_n \boldsymbol{\nu}$ を**法曲率ベクトル**，$\kappa_n$ を**法曲率**と呼ぶ[5].

$\kappa_n$ は $\gamma$ の接ベクトル $\gamma'$ で定まる．ベクトルを変数とする関数であることを強調するため $\kappa_n(\gamma')$ と書くこともある.

曲線 $\gamma(s)$ の空間曲線としての曲率を $\kappa$ としたとき,

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot \boldsymbol{n}_g = \kappa \cos\theta, \qquad \kappa_n = \gamma'' \cdot \boldsymbol{\nu} = \kappa \sin\theta$$

となる．ただし，$\theta$ は $\gamma''$ と $\boldsymbol{n}_g$ がなす角である.

### 2.4.1　法　曲　率

弧長変数表示とは限らない曲面上の曲線 $\gamma(t)$ を考え，$s$ をこの曲線の弧長変数とする．すると,

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\
&= \frac{L\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2M\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + N\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \\
&= \frac{L\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2M\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + N\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}
\end{aligned}$$

この式を，分母分子の $dt^2$ を形式的にキャンセルして，しばしば次のように書く.

$$\kappa_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

**補題 2.4.1**　$\boldsymbol{\nu}$ と $\gamma'$ で張られる平面と曲面の切り口に現れる平面曲線（**法平面断面**または**直截口**（ちょくさいこう）という）の曲率は $\kappa_n(\gamma')$ である.

---

[3] $\boldsymbol{n}_g = \dfrac{-(F(du/dt) + G(dv/dt))\boldsymbol{x}_u + (E(du/dt) + F(dv/dt))\boldsymbol{x}_v}{(EG - F^2)^{1/2}(E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2)^{1/2}}$ である.

[4] 英語では geodesic curvature vector, geodesic curvature.

[5] 英語では normal curvature vector, normal curvature.

**証明** $\gamma(s)$ として法平面断面を表す曲線をとることができる．$s$ を弧長変数として，考えている点を $s=0$ で通るとしてよい．$(\gamma(s)-\gamma(0))\cdot\boldsymbol{n}_g(0)=0$ なので，$\gamma'(s)\cdot\boldsymbol{n}_g(0)=0$, $\gamma''(s)\cdot\boldsymbol{n}_g(0)=0$ であり，$\gamma''(s)$ は $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{\nu}(\gamma(0))$ の張る平面に乗っている．$\gamma'(s)\cdot\gamma'(s)=1$ より $\gamma''(s)$ は $\gamma'(s)$ と直交するので，$\gamma''(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\nu}(\gamma(0))$ である．$\gamma''$ の $\boldsymbol{\nu}$ 方向の成分が $\kappa_n(\gamma'(s))\boldsymbol{\nu}(0)$ なので $\kappa=\kappa_n(\gamma')$ でなければならない． □

### 2.4.2 主曲率，ガウス曲率，平均曲率

■ **主曲率，ガウス曲率，平均曲率の定義** 接ベクトル $\boldsymbol{v}=du\boldsymbol{x}_u+dv\boldsymbol{x}_v$ をいろいろ動かして法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ の最大値および最小値を調べよう．$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=1$ 上で極値を調べればよいから

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2-\lambda(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2-1)$$

の $du$, $dv$ による偏微分が 0 である条件[6]を見る．この式を $du$, $dv$ で偏微分したものを 0 とおくと，

$$\begin{aligned} L\,du+M\,dv&=\lambda(E\,du+F\,dv)\\ M\,du+N\,dv&=\lambda(F\,du+G\,dv)\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

を得る．この条件 (2.4.3) の下では，

$$\begin{aligned}\kappa_n&=\frac{(L\,du+M\,dv)du+(M\,du+N\,dv)dv}{(E\,du+F\,dv)du+(F\,du+G\,dv)dv}\\ &=\frac{\lambda(E\,du+F\,dv)du+\lambda(F\,du+G\,dv)dv}{(E\,du+F\,dv)du+(F\,du+G\,dv)dv}=\lambda\end{aligned}$$

なので，式 (2.4.3) を満たす $\lambda$ が法曲率 $\kappa_n$ の最大値，最小値になる．式 (2.4.3) を書き換えて

$$\begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix}=0\tag{2.4.4}$$

[6] 条件 $g(x,y)=0$ の下で関数 $f(x,y)$ の極値を与える点では，$f_x-\lambda g_x=f_y-\lambda g_y=g=0$ を満たす $\lambda$ が存在する．これはラグランジュの未定乗数法として知られている．

を得るので，$\lambda$ は次を解いて得られる．

$$\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

この2次方程式の2根 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を**主曲率** (principal curvature) という．**ガウス曲率** (Gauss curvature) $K$，**平均曲率** (mean curvature) $H$ を次で定める．

$$K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.4.5}$$

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \tag{2.4.6}$$

ここで，

- $K > 0$ なる点を，**楕円的** (elliptic) な点
- $K = 0$ なる点を，**放物的** (parabolic) な点
- $K < 0$ なる点を，**双曲的** (hyperbolic) な点

という．$\lambda_1 = \lambda_2$ となる点を**臍点**(せいてん)(umbilic) という．

$$4(H^2 - K) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

より，臍点であるのは $H^2 - K = 0$ であることと同値である．

**例 2.4.2（$S^2$ の曲率）** 2次元単位球面 $S^2$ の点 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ での単位法ベクトルは $\boldsymbol{\nu} = (x, y, z)$ で与えられ，直截口は原点を通る平面であり，法曲率は常に1である．最大曲率と最小曲率は共に1であり，ガウス曲率も1である．

**■ ガウス曲率と正射影像**　2.3.2節の最後に述べたように，曲面をその接ベクトル $\boldsymbol{v}$ を法ベクトルとする平面に正射影したとき，法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が0でないならば，その像の輪郭は非特異である．このとき次の関係がある．

**定理 2.4.3（ケンデリンク (Koenderink)）** 正射影像の輪郭の曲率を $\kappa_c$，曲面のガウス曲率を $K$ とすると，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) \neq 0$ ならば

$$K = \kappa_c \kappa_n(\boldsymbol{v})$$

この定理の意味を少し考えてみる．法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ の正負は曲面の法平面断

面が法ベクトルに対してどちら側に曲がっているかで決まる．曲面を物体の境界と見て，その正射影像を考える．正射影像が凸ならば，曲面は楕円的（ガウス曲率は正），正射影像が凹ならば，曲面は双曲的（ガウス曲率は負）であり，輪郭の変曲点に対応する曲面の点は放物的（ガウス曲率は 0）である．この事実を輪郭の曲率 $\kappa_c$ を使って定式化したのがケンデリンク (Jan Koenderink)[7]であり，1980 年頃のことである．

**証明** 原点で曲面を考えているとし，$xy$ 平面を接平面，$\boldsymbol{v}$ を $x$ 軸方向として一般性を失わない．すると曲面は次で与えられる．

$$(u,v)\to\left(u,v,\frac{1}{2}(au^2+2buv+cv^2)+O(u,v)^3\right)$$

$\boldsymbol{v}=(1,0,0)$ 方向の法曲率は，平面曲線 $z=\frac{1}{2}ax^2+O(x)^2$ の原点での曲率なので $\kappa_n(\boldsymbol{v})=a$ を得る．

$$\boldsymbol{x}_u=(1,0,au+bv+O(u,v)^2),\qquad \boldsymbol{x}_v=(0,1,bu+cv+O(u,v)^2)$$

より

$$\boldsymbol{\nu}=(-au-bv,-bu-cv,1)+O(u,v)^2$$

なので，曲面の $yz$ 平面への正射影像の輪郭は $au+bv+O(u,v)^2=0$ の像である．$\kappa_n(\boldsymbol{v})=a\neq 0$ より $u=-\frac{b}{a}v+O(v^2)$ なので，輪郭は

$$\left(0,v,\frac{1}{2}(bu+cv)v+O(u,v)^3\right)=\left(0,v,\frac{1}{2}\frac{ac-b^2}{a}v^2+O(v)^3\right)$$

となり，その曲率は $\kappa_c=\frac{ac-b^2}{a}$，よって $\kappa_c\kappa_n(\boldsymbol{v})=ac-b^2=K$ を得る． □

■ **主方向** $\lambda$ が主曲率のとき，式 (2.4.4) を満たす $(du,dv)$ を**主方向** (principal direction) という．$(du,dv)$ が主方向であれば，式 (2.4.4) より，

$$(L-\lambda E,M-\lambda F)=\mu_1(dv,-du),\quad (M-\lambda F,N-\lambda G)=\mu_2(dv,-du)$$

を満たす実数 $\mu_1$, $\mu_2$ が存在する．

[7]コーエンドリンクと読むのではないかとも思われるが，金谷健一著『形状 CAD と図形の数学』によればケンデリンクとなっているので，ここでもケンデリンクとした．

$$M - \lambda F = -\mu_1 du = \mu_2 dv$$

なので，$\mu_1 = \mu\, dv$, $\mu_2 = -\mu\, du$ とおけて

$$(L - \lambda E,\ M - \lambda F,\ N - \lambda G) = \mu(dv^2,\ -du\, dv,\ du^2)$$
$$(L, M, N) = \lambda(E, F, G) + \mu(dv^2, -du\, dv, du^2)$$

を得る．よって

$$\begin{vmatrix} E & L & dv^2 \\ F & M & -du\, dv \\ G & N & du^2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る．これが主方向の方程式である．

**定理 2.4.4**　2つの主曲率が相異なれば，対応する主方向は直交する．

**証明**　主曲率を $\lambda_1$, $\lambda_2$ とし，対応する主方向が $(du_1, dv_1)$, $(du_2, dv_2)$ で表されているとすると，次の関係式を満たす．

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_i \\ dv_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_i \\ dv_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

これより

$$\begin{aligned} \lambda_1 (du_1\ dv_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} &= (du_1\ dv_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_2 (du_1\ dv_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ から主張を得る．　□

### 2.4.3　測地的曲率と測地線

**■ 測地的曲率**　測地的曲率 $\kappa_g$ の表示式を調べてみる．式 (2.4.2) で $t$ を弧長変数 $s$ に変えた，曲率ベクトルの式を

$$\gamma'' = a\boldsymbol{x}_u + b\boldsymbol{x}_v + \mathrm{II}\,\boldsymbol{\nu}$$

と書けば，次の測地的曲率の表示式を得る．

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \gamma'' \cdot \boldsymbol{n}_g = \gamma'' \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \gamma') = |\gamma'' \quad \boldsymbol{\nu} \quad \gamma'| = |\gamma' \quad \gamma'' \quad \boldsymbol{\nu}| \\
&= |\boldsymbol{x}_u \ \boldsymbol{x}_v \ \boldsymbol{\nu}| \begin{vmatrix} u' & a & 0 \\ v' & b & 0 \\ 0 & \mathrm{II} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} u' & a \\ v' & b \end{vmatrix} \\
&= \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} u' & u'' + (u')^2 \mathit{\Gamma}^u_{uu} + 2u'v' \mathit{\Gamma}^u_{uv} + (v')^2 \mathit{\Gamma}^u_{vv} \\ v' & v'' + (u')^2 \mathit{\Gamma}^v_{uu} + 2u'v' \mathit{\Gamma}^v_{uv} + (v')^2 \mathit{\Gamma}^v_{vv} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

**定理 2.4.5** 曲面上の曲線 $\gamma(s)$ における点 $P$ での測地的曲率は点 $P$ での接平面に正射影して得られる平面曲線の曲率に等しい．

**証明** 曲線 $\gamma(s)$ を含み，接平面に垂直な柱面を考える．考えている平面曲線はこの柱面の接平面による断面であり，$\boldsymbol{n}_g$ はこの単位法ベクトルである．曲線の接線方向の柱面の法曲率は $\gamma'' \cdot \boldsymbol{n}_g = \kappa_g$ であり，主張を得る． □

■ **測地線** 式 (2.4.2) で $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ の曲面の接方向の成分が 0 となるとき，$\gamma(t)$ は**測地線** (geodesic) であるという．測地線であることと曲線に沿って測地的曲率が恒等的に 0 となることは同値である．測地線であるための条件は

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \mathit{\Gamma}^u_{uu} + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\mathit{\Gamma}^u_{uv} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \mathit{\Gamma}^u_{vv} = 0 \tag{2.4.8}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \mathit{\Gamma}^v_{uu} + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\mathit{\Gamma}^v_{uv} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \mathit{\Gamma}^v_{vv} = 0 \tag{2.4.9}$$

となる．始点 $(u(0), v(0))$ と初速度 $(u'(0), v'(0))$ を決めれば，常微分方程式の基本定理より，解 $(u(t), v(t))$ は一意に存在するので，測地線の存在がわかる．

**補題 2.4.6** 曲線 $\gamma(t)$ が測地線ならば，$|\frac{d\gamma(t)}{dt}|$ は定数．すなわち径数 $t$ は弧長に比例する．

**証明** 曲線 $\gamma(t)$ が測地線であるとすると，$\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ の接成分は恒等的に 0 である．すると $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ は直交する．よって

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle = 2\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$$ □

**例 2.4.7**　球面 $S^2$ 上の測地線は大円（の一部）である．実際，球面 $S^2$ 上の弧長変数 $s$ で径数付けられた曲線 $\gamma(s)$ は $\gamma \cdot \gamma = 1$, $\gamma \cdot \gamma' = 0$ および $\gamma \cdot \gamma'' + \gamma' \cdot \gamma' = \gamma \cdot \gamma'' + 1 = 0$ を満たす．測地線ならば $\gamma'' = a\gamma$ であり，前の式に代入して $a = -1$ を得る．測地線の表示を得るには，2 階線形常微分方程式 $\gamma''(s) = -\gamma(s)$ を次の条件下で解けばよい．

$$\gamma(0) = \boldsymbol{a}, \qquad \gamma'(0) = \boldsymbol{v}, \qquad |\boldsymbol{a}| = 1, \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad |\boldsymbol{v}| = 1$$

これを解くと $\gamma(s) = (\cos s)\boldsymbol{a} + (\sin s)\boldsymbol{v}$ となり，所要の結果を得る．

## 2.4 節の演習

**演習 2.4.1**　$S$ を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし $S$ 内の曲線 $\gamma : I \to S$ を考え，$\gamma$ の弧長 $s$ による微分 $'$ で表す．$\gamma$ のフレネ・セレ枠を $\boldsymbol{e} = \gamma'$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$（順に単位接ベクトル，主法ベクトル，従法ベクトル）とし，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{\nu}$ のなす角度を $\vartheta$ とする．次を示せ．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{n}_g' \\ \boldsymbol{\nu}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n}_g \\ \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}$$

（ただし，$\tau_g = \tau + \vartheta'$．$\tau_g$ は**測地的捩率**と呼ばれる．）

**演習 2.4.2**　回転面（例 2.1.4）の第 2 基本形式と主曲率，主方向を求めよ．

**演習 2.4.3**　回転面でガウス曲率が定数であるものを決定せよ．

**演習 2.4.4**　回転面 $\boldsymbol{x}(u, \theta) = (f(u)\cos\theta, f(u)\sin\theta, u)$ のガウス曲率 $K$ と平均曲率 $H$ について次を示せ．

$$K = -\frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}, \quad H = \frac{1 + (f')^2 - ff''}{2f(1 + (f')^2)^{3/2}}$$

**演習 2.4.5**　管（例 2.1.5）の主曲率と主方向を求めよ．

**演習 2.4.6**　曲線 $\alpha : [0, \ell] \to M$ と $\alpha(0)$ を始点とするベクトル $\boldsymbol{w}_0$ に対し，$\frac{d}{ds}\boldsymbol{w}(s)$ が曲面の法ベクトルで $\boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{w}_0$ を満たす $\boldsymbol{w}(s)$ を $\boldsymbol{w}_0$ の曲線 $\alpha$ に沿った**平行移動**という．$\boldsymbol{w}$ は曲線 $\alpha$ に沿って**平行である**ともいう．

$\alpha(s) = \boldsymbol{x}(u(s), v(s))$, $\boldsymbol{w}_0 = a_0\boldsymbol{x}_u(u(0), v(0)) + b_0\boldsymbol{x}_v(u(0), v(0))$ と書くとき，$\boldsymbol{w}(s) = a(s)\boldsymbol{x}_u(u(s), v(s)) + b(s)\boldsymbol{x}_v(u(s), v(s))$ が平行移動である条件は

次で与えられることを示せ．

$$a'(s) = -a(s)(u'\Gamma^u_{uu} + v'\Gamma^u_{uv}) - b(s)(u'\Gamma^u_{uv} + v'\Gamma^u_{vv}), \qquad a(0) = a_0$$

$$b'(s) = -a(s)(u'\Gamma^v_{uu} + v'\gamma^v_{uv}) - b(s)(u'\Gamma^v_{uv} + v'\Gamma^v_{vv}), \qquad b(0) = b_0$$

常微分方程式の基本定理より，これを満たす $a(s), b(s)$ は一意に存在するのである．ベクトルの曲線に沿った平行移動は一意的に定まる．

**演習 2.4.7**　曲線 $\alpha(s) = \boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ に沿った単位ベクトル場 $\boldsymbol{v}(s)$ に対し，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{v}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{v}$ に直交する単位ベクトルなので $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{\nu}$ は正規直交基底をなす．$\boldsymbol{v}$ の $s$ による微分 $\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{v}$ に直交するので，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{v}' = \kappa_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}_1 + \lambda_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\nu}, \qquad \kappa_{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_1 \rangle, \quad \lambda_{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{\nu} \rangle$$

$C^1$ 関数 $\phi = \phi(s)$ に対し $\boldsymbol{w} = (\cos\phi)\boldsymbol{v} + (\sin\phi)\boldsymbol{v}_1$ とおくとき次を示せ．

$$\kappa_{\boldsymbol{w}} - \kappa_{\boldsymbol{v}} = \phi' \tag{2.4.10}$$

**演習 2.4.8**　曲線 $\alpha(s) = \boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ に沿った 2 つのベクトル場 $\boldsymbol{v}(s)$, $\boldsymbol{w}(s)$ が $\alpha(s)$ に沿ってそれぞれ平行ならば，$\langle \boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{w}(s) \rangle$ は定数である．

## 2.5　3 階偏微分と曲面論の基本定理

$\boldsymbol{x}$ が $C^3$ 級であると仮定すると，

$$(\boldsymbol{x}_{uu})_v = (\boldsymbol{x}_{uv})_u, (\boldsymbol{x}_{uv})_v = (\boldsymbol{x}_{vv})_u$$

であるから，式 (2.3.1) より，次の関係式を得る．

$$(\Gamma^u_{uu}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{x}_v + L\boldsymbol{\nu})_v = (\Gamma^u_{uv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu})_u$$

$$(\Gamma^u_{uv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu})_v = (\Gamma^u_{vv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{x}_v + N\boldsymbol{\nu})_u$$

この式を書き換えれば，クリストッフェルの記号と $L$, $M$, $N$ の間の関係式が得られる．この関係式を明示的に書き下すのが本節の最初の目標である．各式の両辺を，式 (2.3.1) と補題 2.3.2 を用いて書き下してみる．

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{uu}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uu}^v \boldsymbol{x}_u + L\boldsymbol{\nu})_v \\
&= \Gamma_{uu,v}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uu,v}^v \boldsymbol{x}_v + L_v \boldsymbol{\nu} + \Gamma_{uu}^u \boldsymbol{x}_{uv} + \Gamma_{uu}^v \boldsymbol{x}_{vv} + \ L\boldsymbol{\nu}_v \\
&= \left(\Gamma_{uu,v}^u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - L\frac{GM-FN}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_u \\
&+ \left(\Gamma_{uu,v}^v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - L\frac{EN-FM}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_v + \ (L_v + M\Gamma_{uu}^u + N\Gamma_{uu}^v)\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{uv}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uv}^v \boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu})_u \\
&= \Gamma_{uv,u}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uv,u}^v \boldsymbol{x}_v + M_u \nu + \Gamma_{uv}^u \boldsymbol{x}_{uu} + \Gamma_{uv}^v \boldsymbol{x}_{uv} + \ M\boldsymbol{\nu}_u \\
&= \left(\Gamma_{uv,u}^u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - M\frac{GL-FM}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_u \\
&+ \left(\Gamma_{uv,u}^v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + (\Gamma_{uv}^v)^2 - M\frac{EM-FL}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_v + \ (M_u + L\Gamma_{uv}^u + M\Gamma_{uv}^v)\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{uv}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uv}^v \boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu})_v \\
&= \Gamma_{uv,v}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{uv,v}^v \boldsymbol{x}_v + M_v \boldsymbol{\nu} + \Gamma_{uv}^u \boldsymbol{x}_{uv} + \Gamma_{uv}^v \boldsymbol{x}_{vv} + \ M\boldsymbol{\nu}_v \\
&= \left(\Gamma_{uv,v}^u + (\Gamma_{uv}^u)^2 + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^u - M\frac{GM-FN}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_u \\
&+ \left(\Gamma_{uv,v}^v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^v - M\frac{EN-FM}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_v + \ (M_v + M\Gamma_{uv}^u + N\Gamma_{uv}^v)\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{vv}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{vv}^v \boldsymbol{x}_v + N\boldsymbol{\nu})_u \\
&= \Gamma_{vv,u}^u \boldsymbol{x}_u + \Gamma_{vv,u}^v \boldsymbol{x}_v + N_u \boldsymbol{\nu} + \Gamma_{vv}^u \boldsymbol{x}_{uu} + \Gamma_{vv}^v \boldsymbol{x}_{uv} + \ N\boldsymbol{\nu}_u \\
&= \left(\Gamma_{vv,u}^u + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^u - N\frac{GL-FM}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_u \\
&+ \left(\Gamma_{vv,u}^v + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^v - N\frac{EM-FL}{EG-F^2}\right)\boldsymbol{x}_v + \ (N_u + L\Gamma_{vv}^u + M\Gamma_{vv}^v)\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\nu}$ 方向の成分を比較すれば次の**マイナルジ・コダッチ** (Mainardi-Codazzi) **の基礎方程式**を得る．

$$L_v - M_u = L\Gamma^u_{uv} + M(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) - N\Gamma^v_{uu} \tag{2.5.1}$$

$$M_v - N_u = L\Gamma^u_{vv} + M(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) - N\Gamma^v_{uv} \tag{2.5.2}$$

さて，$\boldsymbol{x}_u$ 方向の成分を比較すると，

$$\Gamma^u_{uu,v} + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - L\frac{GM - FN}{EG - F^2} = \Gamma^u_{uv,u} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} - M\frac{GL - FM}{EG - F^2}$$

$$\Gamma^u_{uv,v} + (\Gamma^u_{uv})^2 + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - M\frac{GM - FN}{EG - F^2} = \Gamma^u_{vv,u} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{uv} - N\frac{GL - FM}{EG - F^2}$$

を得る．同様に $\boldsymbol{x}_v$ 方向の成分を比較すると，

$$\Gamma^v_{uu,v} + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - L\frac{EN - FM}{EG - F^2} = \Gamma^v_{uv,u} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})^2 - M\frac{EM - FL}{EG - F^2}$$

$$\Gamma^v_{uv,v} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{vv} - M\frac{EN - FM}{EG - F^2} = \Gamma^v_{vv,u} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{vv}\Gamma^v_{uv} - N\frac{EM - FL}{EG - F^2}$$

を得る．

この 4 つの式を，それぞれ移項して整理すると，次の**ガウス** (Gauss) **の基礎方程式**を得る．

$$-\frac{F(LN-M^2)}{EG-F^2} = \Gamma^u_{uu,v} - \Gamma^u_{uv,u} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} \tag{2.5.3}$$

$$\frac{G(LN-M^2)}{EG-F^2} = \Gamma^u_{uv,v} - \Gamma^u_{vv,u} + (\Gamma^u_{uv})^2 + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - \Gamma^u_{vv}\Gamma^u_{uu} - \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{uv} \tag{2.5.4}$$

$$\frac{E(LN-M^2)}{EG-F^2} = \Gamma^v_{uu,v} - \Gamma^v_{uv,u} + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2 \tag{2.5.5}$$

$$-\frac{F(LN-M^2)}{EG-F^2} = \Gamma^v_{uv,v} - \Gamma^v_{vv,u} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} \tag{2.5.6}$$

**定理 2.5.1**　$A = \sqrt{EG-F^2}$ とおくと，曲面のガウス曲率 $K$ は次のように表せる．

$$\begin{aligned} K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} &= \frac{1}{A}\left[\left(\frac{A\Gamma^v_{uu}}{E}\right)_v - \left(\frac{A\Gamma^v_{uv}}{E}\right)_u\right] \\ &= \frac{1}{A}\left[\left(\frac{A\Gamma^u_{vv}}{G}\right)_u - \left(\frac{A\Gamma^u_{uv}}{G}\right)_v\right] \end{aligned}$$

この定理より，ガウス曲率 $K$ は第1基本形式とその2階までの偏微分で表すことができる．これは「ガウスの驚異の定理」と呼ばれる．曲面間の写像 $f : S \to S'$ が，等長変換（第1基本形式を保つ写像）であれば，ガウス曲率も保たれることを主張している．例えば，円柱など平面の等長変形で得られる曲面のガウス曲率は，平面のガウス曲率（恒等的に0）と同じになる．曲率は，曲面の曲がり具合を表す量なので，曲面の3次元空間への埋め込みに依存すると思うのが自然で，したがって第2基本形式にも依存すると考えるのは自然である．しかしながら，ガウス曲率は第1基本形式のみで決まる埋め込みによらない量であり，曲面の内在的な不変量と考えられるのである．

**証明**　$A = \sqrt{EG-F^2}$ を偏微分して得られる式と，式 (2.3.3) より，次の関係式を得る．

$$\frac{A_u}{A} = \frac{E_uG + EG_u - 2FF_u}{2(EG - F^2)} = \Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}$$
$$\frac{A_v}{A} = \frac{E_vG + EG_v - 2FF_v}{2(EG - F^2)} = \Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{vv}$$

これより，式 (2.5.4), (2.5.5) は，次の関係式と同値である．

$$\Gamma^u_{uv,v} - \Gamma^u_{vv,u} - \Gamma^u_{vv}\frac{A_u}{A} + \Gamma^u_{uv}\frac{A_v}{A} + 2\begin{vmatrix} \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{vmatrix} = \frac{G(LN - M^2)}{EG - F^2}$$

$$\Gamma^v_{uu,v} - \Gamma^v_{uv,u} - \Gamma^v_{uv}\frac{A_u}{A} + \Gamma^v_{uu}\frac{A_v}{A} + 2\begin{vmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \end{vmatrix} = -\frac{E(LN - M^2)}{EG - F^2}$$

これと次の関係式（2 番目の等号に式 (2.3.3) を使っている）を比較すれば，求める式を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{E}{A}\left(\frac{A\Gamma^v_{uu}}{E}\right)_v &= \frac{A_v\Gamma^v_{uu} + A\Gamma^v_{uu,v}}{A} - \frac{\Gamma^v_{uu}E_v}{E} \\
&= \frac{A_v}{A}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uu,v} - \frac{2\Gamma^v_{uu}}{E}(\Gamma^u_{uv}E + \Gamma^v_{uv}F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E}{A}\left(\frac{A\Gamma^v_{uv}}{E}\right)_u &= \frac{A_u\Gamma^v_{uv} + A\Gamma^v_{uv,u}}{A} - \frac{\Gamma^v_{uv}E_u}{E} \\
&= \frac{A_u}{A}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uv,u} - \frac{2\Gamma^v_{uv}}{E}(\Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{G}{A}\left(\frac{A\Gamma^u_{vv}}{G}\right)_u &= \frac{A_u\Gamma^u_{vv} + A\Gamma^u_{vv,u}}{A} - \frac{\Gamma^u_{vv}G_u}{G} \\
&= \frac{A_u}{A}\Gamma^u_{vv} + \Gamma^u_{vv,u} - \frac{2\Gamma^u_{vv}}{G}(\Gamma^u_{uv}F + \Gamma^v_{uv}G)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{G}{A}\left(\frac{A\Gamma^u_{uv}}{G}\right)_v &= \frac{A_v\Gamma^u_{uv} + A\Gamma^u_{uv,v}}{A} - \frac{\Gamma^u_{uv}G_v}{G} \\
&= \frac{A_v}{A}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{uv,v} - \frac{2\Gamma^u_{uv}}{G}(\Gamma^u_{vv}F + \Gamma^v_{vv}G)
\end{aligned}$$

□

**定理 2.5.2（曲面論の基本定理）** $(u,v)$ の関数 $E, F, G, L, M, N$ が $E>0$, $G>0$, $EG-F^2>0$ で上の関係式を満たすとき，

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad \mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

をそれぞれ第 1 基本形式，第 2 基本形式とするような曲面が，回転と平行移動を除いて一意に存在する．

**証明** $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$, $\boldsymbol{\nu}$ を未知関数として偏微分方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \boldsymbol{x}_u, && \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \boldsymbol{x}_v \\
&\frac{\partial \boldsymbol{x}_u}{\partial u} = \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{x}_v + L\boldsymbol{\nu}, && \frac{\partial \boldsymbol{x}_u}{\partial v} = \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu} \\
&\frac{\partial \boldsymbol{x}_v}{\partial u} = \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{x}_v + M\boldsymbol{\nu}, && \frac{\partial \boldsymbol{x}_v}{\partial v} = \Gamma^u_{vv}\boldsymbol{x}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{x}_v + N\boldsymbol{\nu} \\
&\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u} = -\tfrac{GL-FM}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u - \tfrac{EM-FL}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v, && \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial v} = -\tfrac{GM-FN}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_u - \tfrac{EN-FM}{EG-F^2}\boldsymbol{x}_v
\end{aligned}$$

を考える．$\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$, $\boldsymbol{\nu}$ の偏微分の式の可積分条件[8]がガウスとマイナルディ・コダッチの基礎方程式であり，最初の 2 式の積分可能条件が，第 4 式と第 5 式で与えられている．よって $\boldsymbol{x}$ について解くことができ，存在がわかる．この偏微分方程式の解の一意性[9]の主張から一意性の主張も従う．　□

## 2.5 節の演習

**演習 2.5.1** $F$ が恒等的に 0 であれば，ガウス曲率は次式で表されることを示せ．

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] \tag{2.5.7}$$

**演習 2.5.2** $\boldsymbol{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$ と $\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u}\cos\bar{v}, \bar{u}\sin\bar{v}, \bar{v})$ は同じガウス曲率をもつが，等長変換では移り合わないことを示せ．

---

[8] $x_\lambda$ $(\lambda = 1, \cdots, m)$ を未知関数とする偏微分方程式

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial u} = \sum_\lambda g_\lambda(u,v)x_\lambda, \qquad \frac{\partial x_\lambda}{\partial v} = \sum_\lambda h_\lambda(u,v)x_\lambda$$

が解をもつ条件を可積分条件という．この条件は $\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial v \partial u}$ に相当する式を偏微分方程式の右辺の項で書き表して得られる．

[9] 上述の偏微分方程式の解は適当な初期条件の下で一意に定まる．

## 2.6 測地的極座標とガウス・ボンネの定理

### 2.6.1 測地的極座標

曲面 $S$ 上に 1 点 $P$ をとり，そこでの接空間の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をとる．$\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2$ を初期ベクトルとする測地線に沿って距離 $r$ だけ進んだ点を $\boldsymbol{x}(r,\theta)$ とする．このとき $R$ を十分小さい正の数として写像

$$\boldsymbol{x}:[0,R)\times[0,2\pi]\to S,\quad (r,\theta)\mapsto\boldsymbol{x}(r,\theta)$$

は点 $P$ の近傍（測地的極座標近傍という）で曲面を径数付けると考えられる．$(r,\theta)$ を曲面の測地的極座標という．$\theta$ を固定すると $r\mapsto\boldsymbol{x}(r,\theta)$ は測地線で $r$ が弧長変数である．よって $\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1$．さらに

$$\boldsymbol{x}_r(0,\theta)=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{（測地線の初期速度）} \tag{2.6.1}$$

$$\boldsymbol{x}_\theta(0,\theta)=0 \qquad \text{（$\boldsymbol{x}(0,\theta)$ は 1 点なので）} \tag{2.6.2}$$

が成り立つ．

**例 2.6.1（平面の測地的極座標）** 点 $(u_0,v_0)$ を中心とする平面の測地的極座標は $(u,v)=(u_0,v_0)+(r\cos\theta,r\sin\theta)$ で与えられる．

$$du=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,\qquad dv=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta$$

より，

$$I=du^2+dv^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

を得る．

**例 2.6.2（球面 $S^2$ の測地的極座標）** $\boldsymbol{e}_0\in S^2$ をとり，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が正規直交基底であるようにとる．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が $\boldsymbol{e}_0$ での $S^2$ の接空間の基底で

$$(r,\theta)\mapsto\boldsymbol{x}(r,\theta)=\cos r\boldsymbol{e}_0+\sin r(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)$$

が測地的極座標を与える．微分すると，

$$\boldsymbol{x}_r = -\sin r\boldsymbol{e}_0 + \cos r(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{x}_\theta = \sin r(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

なので，次の表示を得る．

$$I = dr^2 + \sin^2 r\, d\theta^2$$

**補題 2.6.3**　$(r, \theta)$ を曲面の測地的極座標とするとき，

$$E = \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_r = 1, \qquad F = \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_\theta = 0, \qquad \lim_{r\to 0+0} \frac{h^2}{r^2} = \lim_{r\to 0+0} \frac{\boldsymbol{x}_\theta \cdot \boldsymbol{x}_\theta}{r^2} = 1$$

**証明**　$E = \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_r = 1$ はすでに見た．$r \to \boldsymbol{x}(r, \theta)$ は測地線なので $\boldsymbol{x}_{rr}$ は曲面の法方向を向いており $\boldsymbol{x}_{rr} \cdot \boldsymbol{x}_\theta = 0$．また $\boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_r = 1$ より

$$(\boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_\theta)_r = \boldsymbol{x}_{rr} \cdot \boldsymbol{x}_\theta + \boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_{\theta r} = \boldsymbol{x}_{rr} \cdot \boldsymbol{x}_\theta + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_r)_\theta = \boldsymbol{x}_{rr} \cdot \boldsymbol{x}_\theta = 0$$

よって，$\boldsymbol{x}_r \cdot \boldsymbol{x}_\theta$ は $r$ に依存しないことがわかり，次を得る．

$$\boldsymbol{x}_r(r, \theta) \cdot \boldsymbol{x}_\theta(r, \theta) = \boldsymbol{x}_r(0, \theta) \cdot \boldsymbol{x}_\theta(0, \theta) = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0+0} \frac{\boldsymbol{x}_\theta \cdot \boldsymbol{x}_\theta}{r^2} &= \lim_{r\to 0+0} \frac{\boldsymbol{x}_{r\theta} \cdot \boldsymbol{x}_\theta}{r} && \text{（ロピタルの定理）} \\
&= \lim_{r\to 0+0} (\boldsymbol{x}_{rr\theta} \cdot \boldsymbol{x}_\theta + \boldsymbol{x}_{r\theta} \cdot \boldsymbol{x}_{r\theta}) && \text{（ロピタルの定理）} \\
&= \lim_{r\to 0+0} |\boldsymbol{x}_{r\theta}|^2 && \text{（式 (2.6.2) より } \lim_{r\to 0+0} \boldsymbol{x}_\theta = 0\text{）} \\
&= |-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2|^2 && \text{（式 (2.6.1) より）} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

**定理 2.6.4**　$(r, \theta)$ を曲面の測地的極座標とするとき，$h = |\boldsymbol{x}_\theta|$ とおくと，

$$\lim_{r\to 0+0} h_r = \lim_{r\to 0+0} \frac{h}{r} = 1 \tag{2.6.3}$$

であり，第1基本形式とガウス曲率は次のように表される．

$$ds^2 = dr^2 + h^2 d\theta^2, \qquad K = -\frac{h_{rr}}{h}$$

**証明**　前補題より第1基本形式に関する主張と式 (2.6.3) はわかる．ガウス

曲率 $K$ は，式 (2.5.7) または式 (2.5.5) より得られるが，次のようにしてもよい.

式 (2.3.4) より

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^r_{rr} & \Gamma^r_{r\theta} & \Gamma^r_{\theta\theta}\\ \Gamma^\theta_{rr} & \Gamma^\theta_{r\theta} & \Gamma^\theta_{\theta\theta}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -(h^2)_r\\ 0 & (h^2)_r & (h^2)_\theta\end{pmatrix}$$

なので，測地的極座標のクリストッフェル記号は次のようになる.

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^r_{r\theta} = 0, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -hh_r, \quad \Gamma^\theta_{rr} = 0, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{h_r}{h}, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{h_\theta}{h} \tag{2.6.4}$$

補題 2.3.2 より，$\boldsymbol{\nu}_r$，$\boldsymbol{\nu}_\theta$ の $\boldsymbol{x}_\theta$ の係数はそれぞれ $-N/h^2$，$-M/h^2$ なので，$(L\boldsymbol{\nu})_\theta = (\boldsymbol{x}_{rr})_\theta = (\boldsymbol{x}_{r\theta})_r = (\frac{h_r}{h}\boldsymbol{x}_\theta + M\boldsymbol{\nu})_r$ の $\boldsymbol{x}_\theta$ 成分を比較してわかる式

$$-LN/h^2 = (h_r/h)_r + (h_r/h)^2 - M^2/h^2$$

より，ガウス曲率 $K = (LN - M^2)/h^2$ の式を得る. □

**定理 2.6.5** 測地的極座標近傍内に弧長変数 $s$ で径数付けられた曲線 $(r(s), \theta(s))$ があるとき，曲線が $\theta =$ (定数) となす角を $\phi(s)$ とすると，

$$\kappa_g = \phi' + h_r\theta'$$

ただし $'$ は $s$ による微分を表す.

**証明** $\phi$ の定義より $\cos\phi = \langle \boldsymbol{x}_r, r'\boldsymbol{x}_r + \theta'\boldsymbol{x}_\theta\rangle = r'$ であるから，$r'' = -\phi'\sin\phi$. $\sin\phi = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \langle \boldsymbol{x}_\theta, r'\boldsymbol{x}_r + \theta'\boldsymbol{x}_\theta\rangle/h = h\theta'$ より，$\phi'\cos\phi = h'\theta' + h\theta''$ で $h' = h_r r' + h_\theta\theta'$ を勘案すると，$\theta'' = \frac{\phi'}{h}\cos\phi - \frac{h_r}{h}r'\theta' - \frac{h_\theta}{h}(\theta')^2$ となる. よって式 (2.6.4) より

$$r'' + \Gamma^r_{rr}(r')^2 + 2\Gamma^r_{r\theta}r'\theta' + \Gamma^r_{\theta\theta}(\theta')^2 = -\sin\phi\left(\phi' + \frac{h_r}{h}\sin\phi\right)$$

$$\theta'' + \Gamma^\theta_{rr}(r')^2 + 2\Gamma^\theta_{r\theta}r'\theta' + \Gamma^\theta_{\theta\theta}(\theta')^2 = \frac{\cos\phi}{h}\left(\phi' + \frac{h_r}{h}\sin\phi\right)$$

となり，2.4.3 節の測地的曲率に関する公式 (2.4.7) より，

$$\kappa_g = h\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi(\phi' + \frac{h_r}{h}\sin\phi) \\ \frac{1}{h}\sin\phi & \frac{\cos\phi}{h}(\phi' + \frac{h_r}{h}\sin\phi) \end{vmatrix} = \phi' + \frac{h_r}{h}\sin\phi = \phi' + h_r\theta'$$

となり，証明を終わる． □

### 2.6.2　ガウス・ボンネの定理

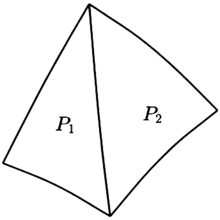
**定理 2.6.6（曲面内の多角形に関するガウス・ボンネ** (Gauss-Bonnet) **の定理）** 曲面上の $m$ 個の滑らかな曲線が作る多角形を考える．多角形の外角を $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とし，この多角形で囲まれた領域を $D$ とすると，次が成り立つ．

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds + \iint_D K\,dA = 2\pi - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

ただし，$\partial D$ 上の積分は，正の向きを入れて（すなわち，反時計回りに）積分するものとする．

この定理を示すには，十分小さい3角形に対してこの定理を証明すれば十分である．実際，曲面上の $n$ 角形 $P$ に対し，その外角を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とし，

$$k(P) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$




とおく．2つの多角形 $D_1$, $D_2$ が，ある辺を共有する形で接しているとき $D = D_1 \cup D_2$ も多角形になる．このとき次が成り立つ．

$$k(D) = k(D_1) + k(D_2)$$
$$\int_{\partial D} \kappa_g ds = \int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \int_{\partial D_2} \kappa_g ds$$
$$\iint_D K\,dA = \iint_{D_1} K\,dA + \iint_{D_2} K\,dA$$

$\kappa_g$ の積分は共有辺上では互いに逆向きに積分するので打ち消し合うことに注意しておこう．よって，$D$ を十分小さい3角形の和に分割すれば，各小3角形でのガウス・ボンネの定理から元の多角形のガウス・ボンネの定理がわかる．

**定理 2.6.6 の証明**　考えている多角形が，ある測地的極座標近傍の中に実現されているとしてよい．グリーン (Green) の定理[10]を用いて境界上の積分を領域の積分に直して計算するというのが，基本のアイデアである．

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\kappa_g ds &= \int_{\partial D}\phi' ds + \int_{\partial D} h_r\theta' ds && (\text{定理 2.6.5})\\ &= \int_{\partial D}\phi' ds + \int_{\partial D} h_r d\theta && (\theta' = d\theta/ds)\\ &= \int_{\partial D}\phi' ds + \iint_D h_{rr} dr\, d\theta && (\text{グリーンの定理})\\ &= \int_{\partial D}\phi' ds - \iint_D K\, dA && (\text{定理 2.6.5})\end{aligned}$$

よって，次を示せば証明は終わる．

$$\int_{\partial D}\phi'\, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

多角形を曲線 $\gamma_0$ で表し，$\gamma_0$ の角を滑らかに丸めた閉曲線 $\gamma_\varepsilon$ で $\gamma_0$ を近似する．$A_\varepsilon$ で多角形の角付近の丸めた部分 $B_\varepsilon$ で，それ以外の多角形の部分を表す．

$$\int_{\partial D}\phi'\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\phi'\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\phi'\, ds - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A_\varepsilon}\phi'\, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

であるので証明を終わる．最後に，$\phi$ は $\varepsilon\to 0$ の極限で $A_\varepsilon$ に沿って外角 $\alpha_i$ の総和だけ増えるという事実を使っている．□

ここで $\phi$ は枠 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に関する曲線の接ベクトル $\gamma'$ の角度（$\mathbb{R}^3$ における角度）であった．これは第 1 基本形式 $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ を使って測った角度であり，$(u,v)$ 平面における角度とは異なる．したがって，上の証明の中で使った，次の事実は証明を要する．

**補題 2.6.7**

$$\int_\gamma \phi' ds = 2\pi$$

---

[10] $f$, $g$ が $C^1$ 関数のとき $\displaystyle\int_{\partial D}(f\,dr + g\,d\theta) = \iint_D (g_r - f_\theta)dr\,d\theta$.

**証明**　第1基本形式の変形

$$ds_t^2 = (1-t)(du^2 + dv^2) + t\,ds^2$$

を考え，$\phi_t$ を $ds_t^2$ に関する対応する角度とする．積分値 $\int_\gamma \phi_t' ds$ は $t$ に関して連続的に変わり，

$$\int_\gamma \phi_t' ds = \int_a^b \phi_t'(s)ds = \phi_t(b) - \phi_t(a) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

なので，この積分値は $2\pi$ の整数倍であり，特に $t$ に関して定数である．$t=0$ のとき $2\pi$ なので，$t=1$ のときも $2\pi$ である．□

測地線で囲まれる多角形を**測地的多角形**という．特に，測地線で囲まれる3角形は**測地的3角形**という．測地線に沿っては測地的曲率は0であるから，測地的3角形に対して，上のガウス・ボンネの定理を適用すると，次の定理が得られる．

**定理 2.6.8（測地的3角形に関するガウス・ボンネの定理）**　測地的3角形 $\triangle ABC$ の囲む領域を $D$ とすると，

$$\iint_D K\,dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

**証明**　外角は $\pi - \angle A, \pi - \angle B, \pi - \angle C$ となるので，前定理より

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds + \iint_D K\,dA = 2\pi - (\pi - \angle A) - (\pi - \angle B) - (\pi - \angle C)$$

が成り立つ．測地線に沿って $\kappa_g = 0$ なので，これを整理すれば主張を得る．□

**系 2.6.9**　$K > 0$ なる領域にある測地的3角形の内角の和は $\pi$ より大きく，$K < 0$ なる領域にある測地的3角形の内角の和は $\pi$ より小さい．

**系 2.6.10**　球面 $S^2$ の測地的3角形 $\triangle ABC$（各辺が大円の一部である3角形）に対して

$$\triangle ABC \text{ の面積} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

**証明**　例 2.4.2 より，球面 $S^2$ のガウス曲率 $K$ は恒等的に1なので，明らか．□

境界付き曲面 $D$ をいくつかの 3 角形に分割する．そのとき，3 角形が $m$ 個，辺が $l$ 個，頂点が $n$ 個あるとすると，$D$ の**オイラー数** (Euler characteristic) $\chi(D)$ を次で定める．

$$\chi(D) = n - l + m$$

**定理 2.6.11（境界付き曲面に対するガウス・ボンネの定理）** 曲面内の有界な領域 $D$ に対し，次が成り立つ．

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds + \iint_D K\,dA = 2\pi\chi(D)$$

**証明**　$D$ を滑らかな辺をもつ $m$ 個の 3 角形に分割し，それらの 3 角形の頂点が $\partial D$ 上に $n_1$ 個，$D$ の内部に $n_2$ 個，また，辺が $\partial D$ 上に $l_1$ 個，$D$ の内部に $l_2$ 個あるとする．各 3 角形に定理 2.6.8 を適用してその総和をとると，$\partial D$ 上の頂点に集まる内角の和は $\pi$，$D$ 上の頂点に集まる内角の和は $2\pi$ なので，

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds + \iint_D K\,dA = \pi n_1 + 2\pi n_2 - m\pi = 2\pi\left(\frac{1}{2}n_1 + n_2 - \frac{1}{2}m\right)$$

辺の総数を数えて得られる式 $l_1 + 2l_2 = 3m$ と $l_1 = n_1$ を用いると，

$$\begin{aligned}\chi(D) &= (n_1 + n_2) - (l_1 + l_2) + m = \frac{1}{2}n_1 + n_2 - \left(\frac{1}{2}l_1 + l_2\right) + m \\ &= \frac{1}{2}n_1 + n_2 - \frac{3}{2}m + m = \frac{1}{2}n_1 + n_2 - \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

なので主張を得る．　□

### 2.6.3　測地的極座標の他の応用

$(r, \theta)$ を測地的極座標とする．

■ **測地円**　$r \leq r_0$ なる領域の曲面への像を，半径 $r_0$ の**測地円**という．

**定理 2.6.12**　点 $P$ を中心とした半径 $r$ の測地円の面積を $A(r)$，周長を $L(r)$ とすると，

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(P)r^3 + o(r^3), \qquad A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12}K(P)r^4 + o(r^4)$$

**証明**　まず次の事実に注意する．

$$L(r) = \int_0^{2\pi} h\,d\theta$$

$r \to 0+0$ のとき $h_r \to 1$ なので

$$L'(r) = \int_0^{2\pi} h_r\,d\theta \to 2\pi \qquad (r \to 0+0)$$

$h_{rr}/h = -K$ で $r \to 0+0$ のとき $h/r \to 1$ なので

$$L''(r) = \int_0^{2\pi} h_{rr} d\theta = \int_0^{2\pi} r \frac{h}{r} \frac{h_{rr}}{h} d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} r \frac{h}{r} K\,d\theta \to 0 \qquad (r \to 0+0)$$

同様に

$$\frac{L''(r)}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{h}{r} \frac{h_{rr}}{h} d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{h}{r} K\,d\theta \to -2\pi K(P) \qquad (r \to 0+0)$$

なので $L'''(0) = -2\pi K(P)$ を得る．よって $L(r)$ に関する式を得る．$A(r) = \int_0^r L(r)dr$ なので，$L(r)$ に関する式を積分すれば $A(r)$ に関する式を得る．□

■ **平面に展開可能な曲面**　平面 $\mathbb{R}^2$ への等長変換（長さを変えない写像）が局所的に存在する曲面を**局所的に平面に展開可能**な曲面という．このとき第1基本形式が $du^2 + dv^2$ となる径数 $(u, v)$ が存在する．

**定理 2.6.13**　ガウス曲率が恒等的に0であれば，測地的極座標近傍は平面の開集合の等長変換による像である．

**証明**　ガウス曲率が恒等的に0であれば，微分方程式 $h_{rr} = 0$ が得られ，積分によって $h = A(\theta)r + B(\theta)$ となる．定理 2.6.4 より $A(\theta) = 1$, $B(\theta) = 0$ となり $h = r$ すなわち，$I = dr^2 + r^2\,d\theta^2$ を得る．□

曲面 $S$ のガウス曲率が恒等的に0で，任意の測地線をどこまでも伸ばせるとすると，写像 $\boldsymbol{x}$ の定義域を $\mathbb{R}^2$ 全体に拡張することができる．ガウス曲率が恒等的に0な線織面を**可展面** (developable surface) という．

同様にして，次を示すことができる．

ガウス曲率が正定数で $K = 1/k^2$ であれば，測地的極座標近傍で微分方程

式 $h_{rr} = -h/k^2$ が得られ，これを解いて

$$h = A(\theta)\cos\frac{r}{k} + B(\theta)\sin\frac{r}{k}$$

となる．定理 2.6.4 より $A(\theta) = 0$, $B(\theta) = k$ となり $h = k\sin\frac{r}{k}$ すなわち，

$$I = dr^2 + k^2\sin^2\frac{r}{k}\,d\theta^2$$

とできる．これは測地的極座標近傍が球面の開集合の等長変換による像であることを意味している．

ガウス曲率が負定数で $K = -1/k^2$ であれば，測地的極座標近傍で微分方程式 $h_{rr} = h/k^2$ が得られ，これを解いて

$$h = A(\theta)\cosh\frac{r}{k} + B(\theta)\sinh\frac{r}{k}$$

となる．定理 2.6.4 より $A(\theta) = 0$, $B(\theta) = k$ となり $h = k\sinh\frac{r}{k}$ すなわち，

$$I = dr^2 + k^2\sinh^2\frac{r}{k}\,d\theta^2$$

とできる．これは測地的極座標近傍が双曲平面[11]の開集合の等長変換による像であることを意味している．

### 2.6 節の演習

**演習 2.6.1** $F$ が恒等的に 0 であれば，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_u/\sqrt{E}$ と $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{x}_v/\sqrt{G}$ は直交する．このとき $\phi = \phi(s)$ を $C^1$ 関数として曲線 $\alpha(s) = \boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ に沿って定義されたベクトル場 $\boldsymbol{w} = (\cos\phi)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\phi)\boldsymbol{e}_2$ を考える．次を示せ．

$$\kappa_{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(G_u v' - E_v u') + \phi' \tag{2.6.5}$$

ただし，$\kappa_{\boldsymbol{w}}$ は演習 2.4.7 で定めたものとする．

**演習 2.6.2** 前問の条件のもとで $\alpha(s) = \boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ $(0 \leq s \leq l)$ が滑らかな境界をもつ領域 $D$ の境界 $\partial D$ を正の向きに径数付けるならば，$\alpha(s)$ に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{w}(s) = \cos\phi(s)\boldsymbol{e}_1 + \sin\phi(s)\boldsymbol{e}_2$ に対し，次が成り立つ．

[11] 双曲平面については 3.2 節を参照のこと．

$$\int_0^l \kappa_{\boldsymbol{w}}(s)ds + \iint_D K\,dA = \phi(l) - \phi(0)$$

**演習 2.6.3**　$\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ の像に含まれる多角形 $D$ に対し，$\beta_1, \cdots, \beta_m$ をその外角とすれば，次が成り立つ．

$$\int_{\partial D} \kappa_g + \iint_D K\,dA = 2\pi - \sum_{i=1}^m \beta_i$$

ただし，右辺は境界 $\partial D$ を正の向きに向き付けて積分している．

**演習 2.6.4**

(1) 半径 $r$ の球面で，北極と南極で角度 $\angle A$ で交わる 2 本の子午線（大円の半分）で囲まれた部分の面積は $2r^2\angle A$ であることを示せ．

(2) この事実を用いて，球面上の測地 3 角形 $\triangle ABC$ に関する次のガウス・ボンネの定理を示せ．

$$\frac{\triangle ABC}{r^2} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

**演習 2.6.5（デカルト (Descartes) の定理）**　閉多面体 $P$ の頂点の個数を $V$，辺の個数を $E$，面の個数を $F$ とする．各頂点 $v$ に対し，その頂点に集まる面の頂点 $v$ で角度の和を $a_v$ とし，$k_v = 2\pi - a_v$ とおく．$\frac{1}{2\pi}\sum_v k_v = V - E - F = \chi(P)$ を示せ．

## 2.7　曲面のいろいろな座標

### 2.7.1　モンジュ (Monge) の標準形

原点を含む曲面を原点近傍で考える．回転させて原点での接平面が $xy$ 平面であるとする．すると曲面はある関数 $f(x, y)$ のグラフ $z = f(x, y)$ として表され，$f(x, y)$ には 1 次の項はない．さらに $uv$ 平面の回転を合成して，$f(x, y)$ の 2 次の項を対角型にすることができる．つまり，$f(x, y)$ は次の形になる．

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + (3\text{ 次以上の項})$$

$\boldsymbol{x} = (u, v, f(u, v))$ なので $\boldsymbol{x}_u = (1, 0, f_u)$, $\boldsymbol{x}_v = (0, 1, f_v)$ となり，

$$E = 1 + {f_u}^2 = 1 + {k_1}^2u^2 + (3\text{ 次以上の項})$$

$$F = f_u f_v = k_1 k_2 uv + (3\text{ 次以上の項})$$

$$G = 1 + {f_v}^2 = 1 + {k_2}^2v^2 + (3\text{ 次以上の項})$$

を得る．面積要素 $dA$ は，

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{1 + {f_u}^2 + {f_v}^2}\,du \wedge dv \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}({k_1}^2u^2 + {k_2}^2v^2) + (3\text{ 次以上の項})\right) du \wedge dv \end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = (-f_u, -f_v, 1)$ なので，単位法ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \frac{1}{\sqrt{1 + {f_u}^2 + {f_v}^2}}(-f_u,\ -f_v,\ 1) \\ &= \left(-k_1u + \cdots,\ -k_2v + \cdots,\ 1 - \frac{1}{2}({k_1}^2u^2 + k_2v^2) + \cdots\right) \end{aligned}$$

で与えられる．$\boldsymbol{x}_{uu} = (0, 0, f_{uu})$, $\boldsymbol{x}_{uv} = (0, 0, f_{uv})$, $\boldsymbol{x}_{vv} = (0, 0, f_{vv})$ なので，第 2 基本形式は次のようになる．

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + {f_u}^2 + {f_v}^2}}(f_{uu}\,du^2 + 2f_{uv}\,du\,dv + f_{vv}\,dv^2)$$

よって，原点での第 1 基本形式，第 2 基本形式の係数はそれぞれ

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1, \qquad L = k_1, \qquad M = 0, \qquad N = k_2$$

となり，原点での主曲率は $k_1, k_2$，ガウス曲率は $k_1k_2$，平均曲率は $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ である．

原点での $\boldsymbol{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ 方向の法曲率は次のようになる．

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \frac{L\cos^2\varphi + 2M\cos\varphi\sin\varphi + N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi + 2F\cos\varphi\sin\varphi + G\sin^2\varphi} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

これを**オイラーの公式**という．

**定理 2.7.1** 双曲的な点における 2 つの漸近方向は主方向によって 2 等分される．

**証明** 原点における漸近方向は $k_1du^2 + k_2dv^2 = 0$ で定義され，$(1, 0)$, $(0, 1)$ が主方向なので明らか． □

臍点でない点の近傍で主曲率は関数である．実際，主曲率 $\kappa$ は

$$\kappa = A^{-3}(h \pm \sqrt{h^2 - A^2(f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2)}) \tag{2.7.1}$$

で与えられる．ただし $A = (1 + {f_u}^2 + {f_v}^2)^{1/2}$, $h = \frac{1}{2}(f_{uu} + f_{vv} + f_{uu}f_v^2 - 2f_{uv}f_uf_v + f_{vv}f_u^2)$．これは次の式を見れば明らかである．

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left[\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\left[\frac{1}{A}\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} - \kappa\begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_uf_v \\ f_uf_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix}\right] \\ &= A^2\kappa^2 - 2\frac{h}{A}\kappa + \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{A^2} \end{aligned}$$

主方向は $(\kappa G - N)\boldsymbol{x}_u - (\kappa F - M)\boldsymbol{x}_v$ で生成されるので，主ベクトルは

$$\frac{1}{l}\left[(\kappa(1 + f_v^2) - \tfrac{f_{vv}}{A})\boldsymbol{x}_u - (\kappa f_uf_v - \tfrac{f_{uv}}{A})\boldsymbol{x}_v\right] \tag{2.7.2}$$

で与えられる．ただし，$l$ は次を満たす正の数である．

$$\begin{aligned} l^2 &= E(\kappa G - N)^2 - 2F(\kappa G - N)(\kappa F - M) + G(\kappa F - M)^2 \\ &= (1 + f_v^2)A^2\kappa^2 - 2f_{vv}A\kappa + \frac{f_{uv}^2 + f_{vv}^2 + (f_{uv}f_v - f_{vv}f_u)^2}{A^2} \end{aligned}$$

$(\kappa F - M)\boldsymbol{x}_u - (\kappa E - L)\boldsymbol{x}_v$ も主方向を生成するので，主ベクトルの別の表示も得るが，詳細は省略する．

### 2.7.2　等温座標

$(u, v)$ が**等温座標** (isothermal) であるとは，ある正値関数 $\lambda$ を用いて，第1基本形式が次の形に書けるときをいう．

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

等温座標では，第1基本形式による角度は $uv$ 平面の角度に一致する．

$\lambda = e^{\varphi}$ とおくと $E = G = \lambda^2 = e^{2\varphi}$, $F = 0$ であり，クリストッフェルの記号は次で与えられる．

$$\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uv} = -\Gamma^u_{vv} = \frac{\lambda_u}{\lambda} = 2\varphi_u, \qquad -\Gamma^v_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^v_{vv} = \frac{\lambda_v}{\lambda} = 2\varphi_v$$

**補題 2.7.2** $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ で座標 $(x,y)$ から座標 $(u,v)$ への変換を表す．$\lambda(du^2 + dv^2) = \mu(dx^2 + dy^2)$ なる正値関数 $\lambda$, $\mu$ が存在すれば $(x,y) \mapsto (u,v)$ は正則関数である．

**証明** 正則であることを示すには，コーシー・リーマンの方程式を満たすことを示せばよい．連鎖法則より

$$\begin{aligned}\lambda(du^2 + dv^2) &= \lambda[(u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2] \\ &= \lambda[(u_x^2 + v_x^2)dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)dx\,dy + (u_y^2 + v_y^2)dy^2]\end{aligned}$$

なので $\lambda(u_x^2 + v_x^2)dx^2 = \mu$, $u_x u_y + v_x v_y = 0$, $\lambda(u_y^2 + v_y^2) = \mu$ となる．よって $\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ は直交行列である．特に $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ であり，コーシー・リーマンの方程式を満たす． □

**補題 2.7.3** 等温座標ではガウス曲率は次で与えられる．

$$K = -e^{-2\varphi}(\varphi_{uu} + \varphi_{vv})$$

**証明** $E = G = A = \lambda^2$ に注意して，定理 2.5.1 を用いて計算すればよい．

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{4(EG)^2}\begin{pmatrix} E(E_v G_v + {G_u}^2) \\ +G(E_u G_u + {E_v}^2) \end{pmatrix} - \frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG} \\ &= \frac{1}{4\lambda^8}\begin{pmatrix} \lambda^2(2\lambda\lambda_v 2\lambda\lambda_v + (2\lambda\lambda_u)^2) \\ +\lambda^2(2\lambda\lambda_u 2\lambda\lambda_u + (2\lambda\lambda_v)^2) \end{pmatrix} - \frac{(\lambda^2)_{vv} + (\lambda^2)_{uu}}{2\lambda^4} \\ &= \frac{2}{\lambda^4}({\lambda_v}^2 + {\lambda_u}^2) - \frac{{\lambda_v}^2 + {\lambda_u}^2 + \lambda\lambda_{vv} + \lambda\lambda_{uu}}{\lambda^4} \\ &= \frac{1}{\lambda^4}({\lambda_v}^2 + {\lambda_u}^2) - \frac{\lambda_{vv} + \lambda_{uu}}{\lambda^3} \\ &= \frac{1}{e^{4\varphi}}((\varphi_u e^{\varphi})^2 + (\varphi_v e^{\varphi})^2) - \frac{{\varphi_u}^2 e^{\varphi} + {\varphi_v}^2 e^{\varphi} + \varphi_{uu} e^{\varphi} + \varphi_{vv} e^{\varphi}}{e^{3\varphi}} \\ &= -e^{-2\varphi}(\varphi_{uu} + \varphi_{vv})\end{aligned}$$

□

平均曲率 $H$ も参考までに書き下しておく．

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{N + L}{2\lambda}$$

ワインガルテンの公式は次のようになる．

$$\boldsymbol{\nu}_u = -\frac{L}{\lambda}\boldsymbol{x}_u - \frac{M}{\lambda}\boldsymbol{x}_v, \qquad \boldsymbol{\nu}_v = -\frac{M}{\lambda}\boldsymbol{x}_u - \frac{N}{\lambda}\boldsymbol{x}_v$$

マイナルジ・コダッチの関係式は次のようになる．

$$L_v - M_u = 2(L\varphi_u + N\varphi_v), \qquad M_v - N_u = -2(L\varphi_v + N\varphi_u)$$

### 2.7.3　曲率線座標

臍点以外の点の近傍では，各点に対し 2 つの主方向が定まり，定理 2.4.4 よりそれらは互いに直交する．主方向の積分曲線を**曲率線** (curvature line) という．臍点以外の点の近傍では，$u=$ (定数)，$v=$ (定数) が曲率線になるような座標をとることができる．この座標を**曲率線座標**という．

曲率線座標では $F \equiv M \equiv 0$ が成り立つ．主曲率，ガウス曲率，平均曲率は

$$\lambda_1 = \frac{L}{E}, \quad \lambda_2 = \frac{N}{G}, \quad K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{LN}{EG}, \quad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{EN + GL}{2EG}$$

となる．主ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ はそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{E}}\partial_u$, $\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_v$ である．

ワインガルテンの関係式は次のようになる．

$$\boldsymbol{\nu}_u = -\lambda_1\boldsymbol{x}_u, \qquad \boldsymbol{\nu}_v = -\lambda_2\boldsymbol{x}_v$$

マイナルジ・コダッチの関係式は次のようになる．

$$L_v = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)E_v, \qquad N_u = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)G_u$$

ガウス曲率は次のように表せる．

$$K = \frac{E(E_vG_v + {G_u}^2) + G(E_uG_u + {E_v}^2)}{4E^2G^2} - \frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG}$$

**■ 平行曲面**　曲面 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ と定数 $t$ に対し，その平行曲面 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\nu}$ を考える．

**定理 2.7.4**　元の曲面の主曲率を $\lambda_1$, $\lambda_2$ とすると，$t \neq \frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1, 2)$ のと

き，平行曲面は非特異で，平行曲面の主曲率を $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ とすると，次の関係式を満たす．

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_i} = \frac{1}{\lambda_i} - t \qquad (i = 1, 2)$$

特に，ガウス曲率 $\tilde{K}$，平均曲率 $\tilde{H}$ は元の曲面のガウス曲率 $K$，平均曲率 $H$ を用いて

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2tH + t^2K}, \qquad \tilde{H} = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2K}$$

となる．

**証明**　$(u, v)$ を曲面 $\boldsymbol{x}$ の曲率線座標とする．$\boldsymbol{\nu}_u = -\lambda_1 \boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{\nu}_v = -\lambda_2 \boldsymbol{x}_v$ より，

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_u = \boldsymbol{x}_u + t\boldsymbol{\nu}_u = (1 - \lambda_1 t)\boldsymbol{x}_u, \qquad \tilde{\boldsymbol{x}}_v = \boldsymbol{x}_v + t\boldsymbol{\nu}_v = (1 - \lambda_2 t)\boldsymbol{x}_v$$

となるので $t \neq \frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1, 2)$ のときは平行曲面は非特異である．第 1 基本形式の係数は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_u \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_u = (1 - \lambda_1 t)^2 E \\
\tilde{F} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_u \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_v = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)F = 0 \\
\tilde{G} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_v \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_v = (1 - \lambda_2 t)^2 G
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\nu}$ は平行曲面の単位法ベクトルなので，第 2 基本形式の係数は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = \big((1 - \lambda_1 t)_u \boldsymbol{x}_u + (1 - \lambda_1 t)\boldsymbol{x}_{uu}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = (1 - \lambda_1 t)L \\
\tilde{M} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = \big((1 - \lambda_1 t)_v \boldsymbol{x}_u + (1 - \lambda_1 t)\boldsymbol{x}_{uv}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = (1 - \lambda_1 t)M = 0 \\
\tilde{N} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = \big((1 - \lambda_2 t)_v \boldsymbol{x}_v + (1 - \lambda_2 t)\boldsymbol{x}_{vv}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = (1 - \lambda_2 t)N
\end{aligned}$$

$(u, v)$ は平行曲面の曲率線座標になる．よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{\lambda}_1} &= \frac{\tilde{E}}{\tilde{L}} = (1 - \lambda_1 t)\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} - t \\
\frac{1}{\tilde{\lambda}_2} &= \frac{\tilde{G}}{\tilde{N}} = (1 - \lambda_2 t)\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2} - t
\end{aligned}$$

を得る．ガウス曲率の式は，次のように示される．

$$\tilde{K} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_1} - t)(\frac{1}{\lambda_2} - t)}$$
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(1 - t\lambda_1)(1 - t\lambda_2)} = \frac{K}{1 - 2H + t^2 K}$$

平均曲率の式は，次のように示される．

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - t} + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_2} - t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1} - t\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} - t\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_1} - t\right)\left(\frac{1}{\lambda_2} - t\right)}$$
$$= \frac{\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 t + \lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 t}{2(1 - t\lambda_1)(1 - t\lambda_2)} = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2 K}$$

□

ガウス曲率 $K$ が正定数で $K = a^2$ のとき $t = 1/a$ とおくと，平均曲率 $\tilde{H}$ は次に見るように定数となる．

$$\tilde{H} = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2 K} = \frac{H - a}{1 - 2H/a + 1} = \frac{H - a}{2(a - H)/a} = -\frac{a}{2}$$

逆に，平均曲率 $H$ が 0 でない定数のとき $t = \frac{1}{2H}$ とおくと，ガウス曲率 $\tilde{K}$ は定数となる．

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2tH + t^2 K} = \frac{K}{t^2 K} = \frac{1}{t^2} = 4H^2$$

■ **中心曲面**　$\lambda_1, \lambda_2$ を主曲率とする曲面 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ に対し，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{\nu}$ $(i = 1, 2)$ を**中心曲面** (surface of centers) または**焦点面** (focal surface) という．考えている点が臍点でない $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ とし，$(u, v)$ を曲率線座標，$i = 1$ として，その曲率を計算しよう．

**定理 2.7.5**　中心曲面 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x} + \frac{E}{L}\boldsymbol{\nu}$ は $(\lambda_1)_u \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき非特異で，そのガウス曲率 $\tilde{K}$ は次で与えられる．

$$\tilde{K} = -\frac{(\lambda_1)^4 (\lambda_2)_u}{(\lambda_1)_u (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

これより中心曲面 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が放物的（すなわち $\tilde{K} = 0$）となるのは $\lambda_1 \neq 0$ なので $(\lambda_2)_u = 0$ となる点であることがわかる．

$(\lambda_2)_u =$ なる点を $\boldsymbol{v}_1 = \partial_u$ 方向の**劣放物点** (subparabolic) という．

**証明**　まず，$\tilde{x}$ の 1 階微分を計算する．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_u = \boldsymbol{x}_u + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]\boldsymbol{\nu}_u + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_u\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}_u + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right](-\lambda_1\boldsymbol{x}_u) + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_u\boldsymbol{\nu}$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_u\boldsymbol{\nu}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_v = \boldsymbol{x}_v + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]\boldsymbol{\nu}_v + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_v\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}_v + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right](-\lambda_2\boldsymbol{x}_v) + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_v\boldsymbol{\nu}$$

$$= \left[1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]\boldsymbol{x}_v + \left[\frac{1}{\lambda_1}\right]_v\boldsymbol{\nu}$$

なので，$(\lambda_1)_u \neq 0$ のとき中心曲面は非特異で，その単位法ベクトルは

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{E^{1/2}}\boldsymbol{x}_u$$

となる．

第 1 基本形式の係数は

$$\tilde{E} = \tilde{\boldsymbol{x}}_u \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_u = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u^2$$

$$\tilde{F} = \tilde{\boldsymbol{x}}_u \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_v = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_v$$

$$\tilde{G} = \tilde{\boldsymbol{x}}_v \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_v = \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 G + \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_v^2$$

なので

$$\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u^2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 G$$

となる．

第 2 基本形式の係数は次のようになる．

$$\tilde{L} = \tilde{\boldsymbol{x}}_{uu} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \left(\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_{uu}\boldsymbol{\nu} - \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u\lambda_1\boldsymbol{x}_u\right) \cdot \frac{1}{E^{1/2}}\boldsymbol{x}_u = -\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u\lambda_1 E^{1/2}$$

$$\tilde{M} = \tilde{\boldsymbol{x}}_{uv} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \left(\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_{uv}\boldsymbol{\nu} - \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u\lambda_2\boldsymbol{x}_v\right) \cdot \frac{1}{E^{1/2}}\boldsymbol{x}_u = 0$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \tilde{\boldsymbol{x}}_{vv}\cdot\tilde{\boldsymbol{\nu}} \\
&= \left(\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)_v \boldsymbol{x}_v + \left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{x}_{vv} + \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_{vv}\boldsymbol{\nu} + \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_v \boldsymbol{\nu}_v\right)\cdot\frac{1}{E^{1/2}}\boldsymbol{x}_u \\
&= \left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_u}{E^{1/2}} = \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{-G_u}{2E^{1/2}} = \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}\right)\frac{G_u}{2E^{1/2}} \\
&= (2\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2))\frac{G_u}{2\lambda_1 E^{1/2}} = (\lambda_2 G_u - N_u)\frac{1}{\lambda_1 E^{1/2}} \\
&= \left(\frac{N}{G}G_u - N_u\right)\frac{1}{\lambda_1 E^{1/2}} = \frac{NG_u - N_u G}{G^2}\frac{G}{\lambda_1 E^{1/2}} = -\left(\frac{N}{G}\right)_u\frac{G}{\lambda_1 E^{1/2}} \\
&= -\frac{(\lambda_2)_u G}{\lambda_1 E^{1/2}}
\end{aligned}$$

$\tilde{N}$ の計算にマイナルジ・コダッチの関係式を使っている．よって，中心曲面のガウス曲率 $\tilde{K}$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= \frac{\tilde{L}\tilde{N}-\tilde{M}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u \lambda_1 E^{1/2}\frac{(\lambda_2)_u G}{\lambda_1 E^{1/2}}}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u^2\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 G} = \frac{(\lambda_2)_u}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_u\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} \\
&= \frac{(\lambda_2)_u}{-\frac{(\lambda_1)_u}{(\lambda_1)^2}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} = -\frac{(\lambda_1)^4(\lambda_2)_u}{(\lambda_1)_u(\lambda_1-\lambda_2)^2}
\end{aligned}$$

□

### 2.7.4 漸近線座標

双曲点の近傍では，各点に対し2つの漸近方向が定まる．漸近方向の積分曲線を**漸近線** (asymptotic line) という．曲面が直線を含めば，その法曲率は0（測地的曲率も0）であり，この直線は漸近線である．

双曲点の近傍では $u=$ (定数), $v=$ (定数) が漸近線になるような座標をとることができる．この座標を**漸近線座標**という．漸近線座標では $L\equiv N\equiv 0$ が成り立つ．ガウス曲率，平均曲率の式を書いておこう．

$$K=\lambda_1\lambda_2=\frac{-M^2}{EG-F^2},\qquad H=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{-FM}{EG-F^2}$$

**定理 2.7.6**　2つの漸近方向のなす角を $\phi$ $(0\leq\phi\leq\pi/2)$ とすると，

$$\cos\phi=\frac{|\lambda_1+\lambda_2|}{|\lambda_1-\lambda_2|}=\frac{|H|}{\sqrt{H^2-K}}$$

特に，$H=0$ となる点で2つの漸近線は直交する．

**証明**　漸近線座標 $(u,v)$ で計算する．

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{4}=H^2=\frac{F^2M^2}{EG-F^2}$$
$$\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4}=H^2-K=\frac{F^2M^2}{(EG-F^2)^2}+\frac{M^2}{EG-F^2}=\frac{EGM^2}{EG-F^2}$$

なので

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}=\frac{F^2}{EG}$$

ベクトル $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ のなす角度が漸近方向のなす角度 $\phi$ なので

$$\cos\phi=\frac{\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u|\cdot|\boldsymbol{x}_v|}=\frac{F}{E^{1/2}G^{1/2}}$$

となる．$0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$ とすると結果を得る．　□

ガウス曲率が負のとき，漸近線座標 $(u,v)$ をとると $L=N=0$ で，

$$K=-\frac{M^2}{EG-F^2},\qquad \Gamma^u_{uv}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\qquad \Gamma^u_{vu}=\frac{EG_v-FE_u}{2(EG-F^2)}$$

となる．マイナルジ・コダッチの方程式は，次のようになる．

$$\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u+2\Gamma^v_{uv}\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$
$$\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v+2\Gamma^v_{vu}\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

2 本の漸近線のなす角を $\phi$ とすると，$\phi$ は

$$\cos\phi=\frac{F}{\sqrt{EG}},\qquad \sin\phi=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}},\qquad \tan\phi=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{F}$$

を満たす．

$\rho=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{|M|}=\sqrt{-K}$, $a=\frac{\sqrt{E}}{\rho}$, $b=\frac{\sqrt{G}}{\rho}$ とおくと，第 1 基本形式，第 2 基本形式はそれぞれ次のようになる．

$$\mathrm{I}=\rho^2(a^2du^2+2ab\cos\phi\,du\,dv+b^2dv^2),\qquad \mathrm{II}=2\rho ab\sin\phi\,du\,dv$$

次の事実にも注意しておこう．

$$EG - F^2 = \rho^4(a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\phi) = \rho^4 a^2 b^2 \sin^2\phi$$

マイナルジ・コダッチの方程式は

$$a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\phi = 0, \qquad b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\phi = 0$$

となる．定理 2.5.1 より，

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma^v_{uu}\right)_v - \left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma^v_{uv}\right)_u\right]$$

となり，次を得る．

$$\phi_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\phi\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\phi\right)_v - ab\sin\phi = 0$$

ガウス曲率が負定数ならマイナルジ・コダッチの方程式より，$a$ は $u$ の関数，$b$ は $v$ の関数となり，$u, v$ を漸近線の弧長変数とすれば $a = 1$, $b = 1$ となる．よって，次の Sine-Gordon の方程式[12]を得る．

$$\phi_{uv} - \frac{\sin\phi}{\rho^2} = 0$$

## 2.7 節の演習

**演習 2.7.1**　$S$ を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし，$S$ 内の曲線 $\gamma : I \to S$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$ が曲率線となす角を $\varphi$ とすると，$\tau_g = (\lambda_2 - \lambda_1)\cos\varphi\sin\varphi$ であることを示せ．

**演習 2.7.2**　空間曲線 $\alpha(t)$ と球面曲線 $\boldsymbol{w}(t) \in S^2$ に対し，$\boldsymbol{x}(t, v)$ を

$$\boldsymbol{x}(t, v) = \alpha(t) + v\boldsymbol{w}(t)$$

で定める．$\boldsymbol{w}' \neq 0$ のとき $\beta(t) = \alpha(t) + u(t)\boldsymbol{w}(t)$ $\left(u(t) = -\frac{\langle \alpha'(t), \boldsymbol{w}'(t)\rangle}{\langle \boldsymbol{w}'(t), \boldsymbol{w}'(t)\rangle}\right)$ とおくとき $\langle \beta'(t), \boldsymbol{w}'(t)\rangle = 0$ を示せ．$\beta(t)$ を線織面 $\boldsymbol{x}$ の**締括線** (striction curve) という．

**演習 2.7.3**　$\boldsymbol{w}' \neq 0$, $|\boldsymbol{w}| = 1$, $\langle \beta', \boldsymbol{w}'\rangle = 0$ を満たす線織面 $\boldsymbol{x}(t, u) = \beta(t) +$

---

[12]Sine-Gordon の方程式とは，物理で現れる Klein-Gordon の方程式 $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi = 0$ の語呂合わせで命名された．

$u\boldsymbol{w}(t)$ について，次を示せ．

(1) $\beta' \times \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w}'$ を満たす関数 $\lambda = \lambda(t)$ が存在する．

(2) $\boldsymbol{\nu} = \frac{\lambda \boldsymbol{w}' + u(\boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{w})}{\sqrt{\lambda^2 + u^2} |\boldsymbol{w}'|}$

(3) $K = -\lambda^2/(\lambda^2 + u^2)^2$

**演習 2.7.4**　$\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}'$, $\alpha'$ が常に 1 次従属である線織面は可展面であることを示せ．

# 第3章

# いくつかの話題

本章は，基礎的であるが，初学者にはあまり解説されない雑多な事柄の寄せ集めである．地図作成の数学的基礎や，双曲平面の基礎事項，幾何学と変分法の接点である極小曲面や平均曲率一定曲面の基礎，ベクトル場や方向場に指数を定義してその和としてオイラー数を計算するポアンカレ・ホップ型の定理などを解説している．3次元ユークリッド空間内の曲面と平面や球面との切り口の解析も行っている．最後の節で，等温座標の存在の証明を解説する．興味に応じて読んで欲しい．

## 3.1 世界地図

地球は赤道方向の半径が 6377.397 km，極方向の半径は 6356.079 km の回転楕円体で近似される．大雑把には，半径 6400 km の球で近似される．ここでは，これを利用して，世界地図を数学的に解析してみよう．

測地的極座標を用いて，世界地図を作る図法を正距方位図法という．以下，他の方法を説明する．

### 3.1.1 円筒図法とメルカトル図法

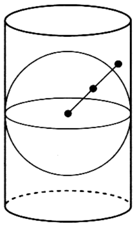
**■ 円筒図法**　地球に巻き付けた円筒に地球を投影して地図を作る図法を円筒(えんとう)図法(ずほう)という．円筒が赤道で地球に接していれば，経線と緯線が直交する地図となる．

簡単のため，地球は原点を中心とする半径 1 の球としよう．

写像

$$(u,v) \mapsto (x,y,z) = (\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \sin v)$$

は $-\pi < u < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ の範囲で単射である．この対応で地図ができる．心射円筒図法という．



$$dx = -\sin u \cos v\, du - \cos u \sin v\, dv$$

$$dy = \cos u \cos v\, du - \sin u \sin v\, dv$$

$$dz = \cos v\, dv$$

なので

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2$$

$dv^2$ の係数が1であるから，この地図は経線の長さは正確に表すことを意味している．

**■ メルカトル図法**　$dv = \cos v\, d\eta$ なる関数 $\eta = \eta(v)$ があれば，新しい座標系

$$u = \xi, \qquad \eta = \eta(v)$$

に関して，

$$ds^2 = \cos^2 v (d\xi^2 + d\eta^2)$$

となり $(\xi, \eta)$ は等温座標となる．$dv = \cos v\, d\eta$ を $\frac{d\eta}{dv} = 1/\cos v$ と見て解くと

$$\eta = \int_0^v \frac{dt}{\cos t} = \log\left(\frac{\cos v}{1 - \sin v}\right) = \log\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる．これがメルカトル図法である．

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2 \eta}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

であり，次の写像で表される．

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\cos \xi}{\cosh \eta},\ \frac{\sin \xi}{\cosh \eta},\ \tanh \eta\right)$$

メルカトル図法は，1569年，フランドル地方出身の地理学者ゲラルドゥス・メルカトル (Gerardus Mercator, 1512–94年) がオランダで発表した地図

に使われた地図投影法である．円筒図法の1つで，その正角性から正角円筒図法ともいう．角度が正しい等角図法であるため，海図・航路用地図としてよく使われる．メルカトルのオリジナルというわけではなく，ドイツのエッラープが1511年に作成した地図にはすでに使われていた．

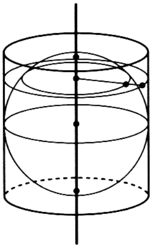
### 3.1.2 正積図法

面積を正しく表す図法を正積図法という．$EG-F^2=1$ となる地図である．

■ **ランベルト正積円筒図法**　$z$ 軸を光源として，赤道で地球に接する円柱に投影する方法（ランベルト正積円筒図法）であり，次の写像で表される．

$$\mathbb{R}^2 \to S^2, \qquad (u,v) \mapsto (\cos u\sqrt{1-v^2},\ \sin u\sqrt{1-v^2},\ v)$$

計算すると，



$$dx = -\sqrt{1-v^2}\sin u du - \frac{v\cos u}{\sqrt{1-v^2}}dv$$
$$dy = \sqrt{1-v^2}\cos u du - \frac{v\sin u}{\sqrt{1-v^2}}dv$$
$$dz = dv$$

なので，第1基本形式は

$$ds^2 = (1-v^2)du^2 + \frac{1}{1-v^2}dv^2$$

となり，$EG-F^2=1$ を得る．

■ **ランベルト正積方位図法**　次の写像で与えられる図法である．

$$\mathbb{R}^2 \to S^2, \qquad (u,v) \mapsto \left(u\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4}},\ v\sqrt{1-\frac{u^2+v^2}{4}},\ \frac{u^2+v^2}{2}-1\right)$$

計算すると，第1基本形式は

$$ds^2 = \frac{1}{4(4-u^2-v^2)}\begin{pmatrix}(v^4+u^2v^2-8v^2+16)du^2+2uv(u^2+v^2-8)du\,dv \\ +(u^4+u^2v^2-8u^2+16)dv^2\end{pmatrix}$$

となり，$EG-F^2=1$ となる．

### 3.1.3　立体射影

原点を中心とする単位球面 $S^2$ 上の点を $P$ とする．$N = (0,0,1)$ を北極とし，直線 $NP$ と平面 $z = 0$ との交点 $Q$ の座標を $(u,v,0)$ とする．$P \neq N$ のとき $Q$ が定まる．このとき $\overrightarrow{NP} = t\overrightarrow{NQ}$ となる実数 $t$ があるから，

$$(x,\ y,\ z-1) = t(u,\ v,\ -1)$$

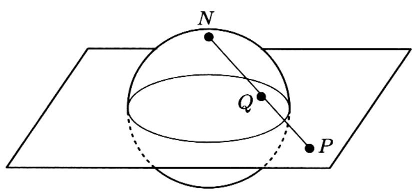
となる．

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = (tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = t^2(u^2+v^2+1) - 2t + 1$$

より $t = \frac{2}{u^2+v^2+1}$ となり，次の関係式を得る．（平射方位図法）

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \qquad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \qquad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

$$u = \frac{x}{1-z}, \qquad v = \frac{y}{1-z}$$




第 1 基本形式を計算すると，

$$ds^2 = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}(du^2 + dv^2)$$

となり，等温座標であることがわかる．

### 3.1.4　中心射影

原点 $O$ 中心の単位球面上の点を $P$，直線 $\overline{OP}$ と平面 $z = 1$ との交点 $Q$ の座標を $(u,v,1)$ とする．このとき $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OQ}$ となる実数 $t$ があるから，

$$(x,\ y,\ z) = t(u,\ v,\ 1)$$

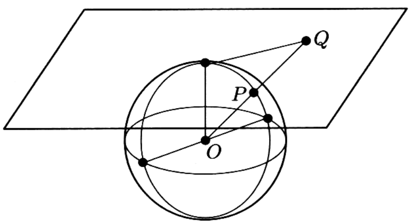
となる．

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = (tu)^2 + (tv)^2 + t^2 = t^2(u^2 + v^2 + 1)$$

より $t = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$ となり，次の関係式を得る．

$$u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z},$$

$$x = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$




第 1 基本形式を計算すると，

$$ds^2 = \frac{1}{u^2+v^2+1}((1+v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1+u^2)dv^2)$$

となり，$(u, v) = (0, 0)$ 以外では等角性もなく，

$$EG - F^2 = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

なので，面積も保たない．

これを地図作成に利用したのが心射方位図法で，すべての大円を直線に投影する図法である．それゆえに，実際の 2 地点間の最短経路は，地図上でも最短距離になる．

心射方位図法は，タレスによって紀元前 6 世紀に開発された，最も古い地図の投影法であるといわれている．

## 3.2 双曲平面

$\mathbb{R}^3$ に**擬内積**（非正値非退化対称双 1 次形式）

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = -u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2, \qquad \boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2), \quad \boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2)$$

を入れた空間を 3 次元**ミンコフスキー** (Minkowski) **空間**といい，$\mathbb{R}^3_1$ で表す．$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ のとき，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は**擬直交**するという．

**定理 3.2.1**　3 次元ミンコフスキー空間内の曲面

$$H^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3_1 : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1,\ x_0 > 0\}$$

を考える．点 $\boldsymbol{x} \in H^2$ での接ベクトル全体は，位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ に擬直交するベクトル全体であり，擬内積を接ベクトル全体に制限すると内積（正値対称双 1 次形式）になる．

**証明**　$H^2$ 内の曲線 $\gamma(t)$ をとると $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$ であり，微分して

$$\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

を得る．つまり，接ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は位置ベクトル $\gamma(t)$ に擬直交している．$\boldsymbol{x} \in H^2$ をとる．$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)$ とおくと，$x_0 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}$ である．$\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2)$ を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ なるようにとると，

$$0 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = -\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}\, v_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2$$

より $v_0 = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = -{v_0}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 &= -\frac{(x_1 v_1 + x_2 v_2)^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1} + {v_1}^2 + {v_2}^2 \\
&\geq \frac{({x_1}^2 + {x_2}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2) - (x_1 v_1 + x_2 v_2 + 1)^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1} \\
&= \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1} > 0
\end{aligned}$$

となり，擬内積の制限は内積となることがわかった．　□

$H^2$ にこの内積の構造が入ったものを**双曲平面**という．

**■ 測地線** $\boldsymbol{x} \in H^2$ とし，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$ なる $\boldsymbol{v}$ をとる．

$$\gamma(t) = \cosh t\boldsymbol{x} + \sinh t\boldsymbol{v} \tag{3.2.1}$$

とおくと，$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$ であり，$\gamma(t)$ は $H^2$ 上の曲線である．

$$\gamma'(t) = \sinh t\boldsymbol{x} + \cosh t\boldsymbol{v}, \qquad \gamma''(t) = \cosh t\boldsymbol{x} + \sinh t\boldsymbol{v}$$

なので，$\gamma''(t) = \gamma(t)$ であり，$H^2$ の接方向の成分は 0 である．つまり，$\gamma(t)$ は $H^2$ の測地線[1]と考えられる．この測地線は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ の張る平面と $H$ との共通部分としても捉えられる．

測地的極座標は，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ なるようにとると，

$$(r, \theta) \mapsto \boldsymbol{x}(r, \theta) = \cosh r\boldsymbol{x} + \sinh r(\cos\theta\boldsymbol{v}_1 + \sin\theta\boldsymbol{v}_2)$$

で与えられる．偏微分すると，

$$\boldsymbol{x}_r(r, \theta) = \sinh r\boldsymbol{x} + \cosh r(\cos\theta\boldsymbol{v}_1 + \sin\theta\boldsymbol{v}_2)$$
$$\boldsymbol{x}_\theta(r, \theta) = \sinh r(-\sin\theta\boldsymbol{v}_1 + \cos\theta\boldsymbol{v}_2)$$

なので，次を得る．

$$ds^2 = \langle \boldsymbol{x}_r dr + \boldsymbol{x}_\theta d\theta, \boldsymbol{x}_r dr + \boldsymbol{x}_\theta d\theta \rangle = dr^2 + \sinh^2 r\, d\theta^2$$

**■ クライン (Klein) 円盤モデル** $B^2 = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : {v_1}^2 + {v_2}^2 < 1\}$ として，原点と $H^2$ の点 $(x_0, x_1, x_2)$ を通る直線は，$\{1\} \times B^2$ と 1 点で交わるから，その座標を $(1, v_1, v_2)$ とすると，$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in H^2$ に対し，

$$(1, v_1, v_2) = \frac{1}{x_0}(x_0, x_1, x_2)$$

である．$(x_0, x_1, x_2)$ を $(v_1, v_2)$ で表すと，写像

$$K : B^2 \to H^2, \qquad (v_1, v_2) \mapsto \boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_1}^2 - {v_2}^2}}(1, v_1, v_2)$$

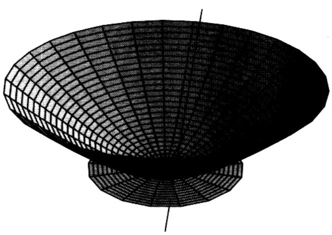
[1] クリストッフェルの記号は第 1 基本形式で定まるので，測地線の概念を式 (2.4.8), (2.4.9) で定めることができる．式 (3.2.1) はこの意味での測地線である．

を得る．この写像 $K$ で $B^2$ と $H^2$ を同一視すると，$H^2$ の接ベクトル $\boldsymbol{x}_{v_i}$ と $B^2$ の接ベクトル $\partial_{v_i}$ を同一視でき，

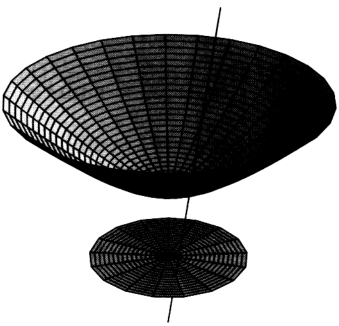
$$ds^2 = \frac{(1 - {v_2}^2)d{v_1}^2 + 2v_1v_2dv_1dv_2 + (1 - {v_1}^2)d{v_2}^2}{1 - {v_1}^2 - {v_2}^2}$$

を得る．点 $\boldsymbol{x}$ での速度が $\boldsymbol{v}$ である $H^2$ の測地線のクライン円盤への像は，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ の張る平面と $\{0\} \times B^2$ の共通部分であるから，$B^2$ の2つの境界点を結ぶ線分として捉えられる．

$$\langle \partial_{v_1}, \partial_{v_1} \rangle = \frac{1 - {v_2}^2}{1 - {v_1}^2 - {v_2}^2}$$
$$\langle \partial_{v_1}, \partial_{v_2} \rangle = \frac{v_1 v_2}{1 - {v_1}^2 - {v_2}^2}$$
$$\langle \partial_{v_2}, \partial_{v_2} \rangle = \frac{1 - {v_1}^2}{1 - {v_1}^2 - {v_2}^2}$$



クラインモデル



ポアンカレモデル

**■ポアンカレ (Poincaré) 円盤モデル**　$B^2 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : {u_1}^2 + {u_2}^2 < 1\}$ として，点 $(-1, 0, 0)$ と $H^2$ の点 $(x_0, x_1, x_2)$ を通る直線は，$\{0\} \times B^2$ と1点で交わるから，その座標を $(0, u_1, u_2)$ とすると，

$$(0, u_1, u_2) - (-1, 0, 0) = \frac{1}{x_0 + 1}\Big((x_0, x_1, x_2) - (-1, 0, 0)\Big)$$

であり，$(x_0, x_1, x_2)$ を $(u_1, u_2)$ で表すと，写像

$$P : B^2 \to H^2, \qquad (u_1, u_2) \mapsto \boldsymbol{x} = \frac{1}{1 - {u_1}^2 - {u_2}^2}(1 + {u_1}^2 + {u_2}^2, 2u_1, 2u_2)$$

を得る．この写像 $P$ により，$B^2$ と $H^2$ を同一視すると $H^2$ の接ベクトル $\boldsymbol{x}_{u_i}$ と $B^2$ の接ベクトル $\partial_{u_i}$ を同一視でき，

$$\partial_{u_1} = \frac{2}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}\Big(2u_1\partial_{x_0} + (1+{u_1}^2-{u_2}^2)\partial_{x_1} + 2u_1u_2\partial_{x_2}\Big)$$
$$\partial_{u_2} = \frac{2}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}\Big(2u_2\partial_{x_0} + 2u_1u_2\partial_{x_1} + (1-{u_1}^2+{u_2}^2)\partial_{x_2}\Big)$$

となり，

$$ds^2 = \frac{4(d{u_1}^2+d{u_2}^2)}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}$$

を得る．計算すると，ポアンカレ円盤モデルの座標 $(u_1,u_2)$ とクライン円盤モデルの座標 $(v_1,v_2)$ の間の対応は次で与えられる．

$$(v_1,v_2) = \frac{2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}(u_1,u_2)$$
$$(u_1,u_2) = \frac{1-\sqrt{1-{v_1}^2-{v_2}^2}}{{v_1}^2+{v_2}^2}(v_1,v_2)$$

単位球面 $S^2 = \{(y_0,y_1,y_2) : {y_0}^2+{y_1}^2+{y_2}^2 = 1\}$ の点 $(1,0,0)$ から $\{0\}\times B^2$ への立体射影は

$$\Phi : (u_1,u_2) \mapsto (y_0,y_1,y_2) = \frac{1}{{u_1}^2+{u_2}^2+1}({u_1}^2+{u_2}^2-1, 2u_1, 2u_2)$$

の逆写像なので，写像 $(u_1,u_2)\mapsto(v_1,v_2)$ は $\Phi$ に正射影 $(y_0,y_1,y_2)\mapsto(y_1,y_2)$ を合成したものである．これを使って次を示す．

**定理 3.2.2**　双曲平面 $H^2$ の測地線をポアンカレ円盤モデルで見ると，境界 ${u_1}^2+{u_2}^2=1$ に直交する円弧である．

**概証**　球面上の弧 $(\sqrt{1-a^2}\sin t, a, \sqrt{1-a^2}\cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$ を考える．この弧の $(y_1,y_2)$ 平面への正射影は $(0,a,\sqrt{1-a^2})$ と $(0,a,-\sqrt{1-a^2})$ を結ぶ線分である．

$$\frac{((\sqrt{1-a^2}\sin t, a, \sqrt{1-a^2}\cos t)-(1,0,0))}{1-\sqrt{1-a^2}\sin t} = (0,u_1,u_2)-(1,0,0)$$

より，

$$u_1 = \frac{a}{1-\sqrt{1-a^2}\sin t}, \qquad u_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}\cos t}{1-\sqrt{1-a^2}\sin t}$$

となる．これを $t$ で微分して $t=0,\pi$ としてみれば，境界 ${u_1}^2+{u_2}^2=1$ で境界に直交することがわかる．さらに

$$\sin t = \frac{u_1-a}{u_1\sqrt{1-a^2}}, \qquad \cos t = \frac{au_2}{u_1\sqrt{1-a^2}}$$

であり，$1=\sin^2 t+\cos^2 t = \frac{1}{{u_1}^2(1-a^2)}\left((u_1-\frac{1}{a})^2+a^2{u_2}^2\right)$ より

$$0=(u_1-a)^2+a^2{u_2}^2-{u_1}^2(1-a^2) = a^2\left((u_1-\tfrac{1}{a})^2+{u_2}^2-\frac{1-a^2}{a^2}\right)$$

これは中心 $(\frac{1}{a},0)$, 半径 $\sqrt{1-a^2}/|a|$ の円である．　□

$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=-1$, $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle=0$, $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=1$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2)$, $\boldsymbol{v}=(v_0,v_1,v_2)$ をとる．点 $\boldsymbol{x}$ での速度が $\boldsymbol{v}$ である $H^2$ の測地線

$$\gamma(t)=\cosh t(x_0,x_1,x_2)+\sinh t(v_0,v_1,v_2)$$

のポアンカレ円盤への像は，$x_0=\sqrt{1+{x_1}^2+{x_2}^2}$, $v_0=\sqrt{-1+{v_1}^2+{v_2}^2}$ として，次式で表される．

$$(u_1,u_2)=\frac{1}{1+x_0\cosh t+v_0\sinh t}(\cosh t(x_1,x_2)+\sinh t(v_1,v_2))$$

$\boldsymbol{e}_i=\frac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{2}\boldsymbol{x}_{u_i}$ $(i=1,2)$ とおいて，$P:B^2\to\mathbb{R}^3_1$ を双曲平面の径数表示と見ると，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は擬正規直交基底であり次を得る．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{u_1u_1} &= \frac{4}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}(u_1\boldsymbol{e}_1-u_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{x})\\
\boldsymbol{x}_{u_1u_2} &= \frac{4}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}(u_2\boldsymbol{e}_1+u_1\boldsymbol{e}_2)\\
\boldsymbol{x}_{u_2u_2} &= \frac{4}{(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2}(-u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

**■ 上半平面モデル**　上半平面 $\mathbb{H}=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_2>0\}$ からポアンカレ円盤 $B^2=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2 : {u_1}^2+{u_2}^2<1\}$ への全単射

$$S:\mathbb{H}\to B^2,\ (y_1,y_2)\mapsto \frac{y_1+\sqrt{-1}(y_2-1)}{y_1+\sqrt{-1}(y_2+1)} = \frac{({y_1}^2+{y_2}^2-1,\ -2y_1)}{{y_1}^2+(y_2+1)^2}$$

を考える．この逆写像は次で与えられる．

$$S^{-1}: B^2 \to \mathbb{H},\ (u_1, u_2) \mapsto \frac{-u_2 + \sqrt{-1}(u_1+1)}{1 - u_1 - \sqrt{-1}u_2} = \frac{(-2u_2,\ 1 - {u_1}^2 - {u_2}^2)}{(u_1-1)^2 + {u_2}^2}$$

この写像で，$\mathbb{H}$ とポアンカレ円盤 $B^2$ を同一視すると，

$$\partial_{y_1} = \frac{2}{{y_1}^2 + (1+y_2)^2}\left(2y_1(1+y_2)\partial_{u_1} + ((1+y_2)^2 - {y_1}^2)\partial_{u_2}\right)$$
$$\partial_{y_2} = \frac{2}{{y_1}^2 + (1+y_2)^2}\left(((1+y_2)^2 - {y_1}^2)\partial_{u_1} - 2y_1(1+y_2)\partial_{u_1}\right)$$

となり，次の内積の表示式を得る．

$$\langle \partial_{y_1}, \partial_{y_1} \rangle = \langle \partial_{y_2}, \partial_{y_2} \rangle = \frac{1}{{y_2}^2}, \quad \langle \partial_{y_1}, \partial_{y_2} \rangle = 0, \quad ds^2 = \frac{{dy_1}^2 + {dy_2}^2}{{y_2}^2}$$

複素関数論で習う 1 次分数変換の円円対応の知識を使えば，測地線の上半平面における像は，境界 $\{y_2 = 0\}$ に直交する直線または円であることがわかる．

**■ ガウス曲率** ガウス曲率 $K$ は曲面の第 1 基本形式で決まってしまう．この考えを敷衍（ふえん）すると，双曲平面のガウス曲率も計算できる．ポアンカレモデルの座標 $(u_1, u_2)$ および上半空間モデルの座標 $(y_1, y_2)$ は双曲平面の等温座標である．ここで $\lambda = 1/y_2$ なので，$\varphi = -\log y_2$ を補題 2.7.3 のガウス曲率の式に形式的に当てはめると，

$$K = -e^{2\varphi}(\varphi_{y_1 y_1} + \varphi_{y_2 y_2}) = -{y_2}^2 \frac{1}{{y_2}^2} = -1$$

を得る．双曲平面はガウス曲率が $-1$ の空間であることがわかる．

**■ 歴史** 非ユークリッド幾何が成立する以前，ユークリッド原論の 5 番目の公準（任意の直線上にない 1 点を通る平行な直線がただ 1 本存在する．平行線の公理[2]）を，ユークリッドの他の公準から証明しようという試みが多数なされた．しかしながら，双曲平面ではユークリッド原論の平行線の公準以外の公準はすべて成立するが，平行線公準は次のように書き換えなければならない．すなわち，「ある直線 $L$ とその直線上にない点 $P$ が与えられたとき，$P$

[2]現代では公理と呼ぶべきであろう．しかし原論には「公準」という語が使われているので原論を参照するときには公準と呼ぶ．

を通り $L$ に交わらない直線は無数に存在する.」これは平行線の公理は他の公理からは証明できないということを言っている. なぜならば, 他の公理から証明できるとすれば, その他の全ての公理が成り立つ双曲幾何学でも平行線の公理が成り立つはずだからである.

双曲幾何学はロバチェフスキー（1829 年発表）, ボーヤイ（1832 年発表）, およびガウス（発表せず）によって基礎付けられた. 新たな非ユークリッド幾何学の誕生である.

非ユークリッド幾何学としては, 球面幾何学というのもあり, こちらは, 測量や正確な地図を作る必要から古くから研究されている. 球面幾何や双曲幾何をユークリッド幾何と同様の対象として認識することが, リーマン多様体の概念の成立の揺り籠となった.

## 3.3　極小曲面

平均曲率 $H$ が恒等的に 0 となる曲面を**極小曲面**という. 以下, 極小曲面の基礎事項を解説する. $\mathbb{R}^2$ の開集合 $U$ 上で定義された曲面の径数付け $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ を考える. $U$ 内の有界閉集合 $D$ 上で定義された関数 $h$ をとり, 次の変形を考える.

$$\boldsymbol{x}^t : D \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \boldsymbol{x}(u, v) + th(u, v)\boldsymbol{\nu}(u.v)$$

これを**法変分**という.

曲面 $\boldsymbol{x}(D)$ の表面積 $\iint_D \sqrt{EG - F^2} du\, dv$ を $A_D(\boldsymbol{x})$ で表す.

**補題 3.3.1**　$A(t) = A_D(\boldsymbol{x}^t)$, $dA = \sqrt{EG - F^2} du\, dv$ と書けば,

$$A(t) = A_D(\boldsymbol{x}) - 2t \iint_D Hh\, dA + O(t^2)$$

ここで $\frac{f(t)-g(t)}{h(t)}$ が有界のとき $f(t) = g(t) + O(h(t))$ と書いている.

**証明**　法変分を偏微分すると,

$$\boldsymbol{x}^t_u = \boldsymbol{x}_u + th\boldsymbol{\nu}_u + th_u\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{x}^t_v = \boldsymbol{x}_v + th\boldsymbol{\nu}_v + th_v\boldsymbol{\nu}$$

なので, 第 1 基本量は次で与えられる.

$$E^t = E + 2th\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_u\rangle + O(t^2) = E - 2thL + O(t^2)$$
$$F^t = F + th(\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_v\rangle + \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_u\rangle) + O(t^2) = F - 2thM + O(t^2)$$
$$G^t = G + 2th\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_v\rangle + O(t^2) = G - 2thN + O(t^2)$$

よって

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(EN - 2FM + GL) + O(t^2) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH + O(t^2)) \end{aligned}$$

を得る．これより $\boldsymbol{x}^t$ の曲面積は次で与えられる．

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_D \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\,du\,dv \\ &= \iint_D \sqrt{(1 - 4thH + O(t^2))(EG - F^2)}\,du\,dv \end{aligned}$$

この式を $t$ で微分し $t = 0$ とおけば，

$$A'(0) = -\iint_D 2hH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{3.3.1}$$

を得る．よって補題は証明された． □

**定理 3.3.2** $\boldsymbol{x}$ が極小曲面であることと，すべての法変分について $A'(0) = 0$ となることは同値である．

**証明** 極小曲面であれば $H \equiv 0$ なので，明らかに $A'(0) = 0$ である．もし $H(p) \neq 0$ なる $p \in D$ があれば，$h$ を $h(p) = H(p)$，かつ $p$ の小近傍の外では恒等的に 0 となるようにとれば $A'(0) < 0$ となる． □

$\boldsymbol{h} = H\boldsymbol{\nu}$ を**平均曲率ベクトル**という．関数 $h$ として $H$ をとれば，式 (3.3.1) は

$$A'(0) = -2\iint_D |\boldsymbol{h}|^2\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

となる．このことは，平均曲率 $H$ が 0 でない曲面を平均曲率ベクトル方向へ微小変形すると面積が減ることを意味している．

以下，正則関数に関する基礎知識を仮定する．

**定理 3.3.3（ワイエルシュトラス (Weierstrass) の表現公式）**　$\mathbb{C}$ の単連結[3]な開集合 $U$ 上の正則関数 $f : U \to \mathbb{C}$ と有理型関数 $g : U \to \mathbb{C}$ をとり，写像 $X : U \to \mathbb{C}^3$ を次で定める．

$$X(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f(w)}{2}\Big((1-g(w)^2,\ \sqrt{-1}\big(1+g(w)^2\big),\ 2g(w)\Big)dw \tag{3.3.2}$$

ただし $z_0 \in U$．このとき，$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\, X$ は極小曲面である．逆に，すべての極小曲面は局所的にこの形に表される．

**証明**　$Y = (Y_1, Y_2, Y_3),\ Z = (Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{C}^3$ に対し，

$$\langle Y, Z\rangle = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3$$

とおく．$(u, v)$ を等温座標とし，$z = u + \sqrt{-1}v,\ \bar{z} = u - \sqrt{-1}v$ と書く．このとき $dz = du + \sqrt{-1}dv,\ d\bar{z} = du - \sqrt{-1}dv$ であるから，第 1 基本形式は

$$\lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 dz\, d\bar{z} \tag{3.3.3}$$

と書ける．平均曲率 $H$ は $H = \frac{L+N}{\lambda^2}$ で

$$L + N = \left\langle \boldsymbol{x}_{uu} + \boldsymbol{x}_{vv}, \frac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|}\right\rangle$$

であるから，極小曲面であることは $\boldsymbol{x}_{uu} + \boldsymbol{x}_{vv}$ が $\boldsymbol{x}_u$ と $\boldsymbol{x}_v$ の 1 次結合であることと同値である．$\partial_u = \partial_z + \partial_{\bar{z}},\ \partial_v = \sqrt{-1}(\partial_z - \partial_{\bar{z}})$ であるから，

$$4\boldsymbol{x}_{z\bar{z}} = \boldsymbol{x}_{uu} + \boldsymbol{x}_{vv} = A\boldsymbol{x}_z + B\boldsymbol{x}_{\bar{z}} \tag{3.3.4}$$

と書くことができる．$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv = \boldsymbol{x}_z dz + \boldsymbol{x}_{\bar{z}} d\bar{z}$ であるので，第 1 基本形式は

$$\lambda^2(du^2 + dv^2) = \langle d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{x}_z\rangle dz^2 + 2\langle \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{x}_{\bar{z}}\rangle dz\, d\bar{z} + \langle \boldsymbol{x}_{\bar{z}}, \boldsymbol{x}_{\bar{z}}\rangle d\bar{z}^2$$

と書ける．式 (3.3.3) と比較すると $\langle \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{x}_z\rangle = \langle \boldsymbol{x}_{\bar{z}}, \boldsymbol{x}_{\bar{z}}\rangle = 0$ であり，これをさらに微分して次を得る．

[3] 穴の開いてないという意味．例えば円盤は単連結．

$$\langle \boldsymbol{x}_{z\bar{z}}, \boldsymbol{x}_z \rangle = \langle \boldsymbol{x}_{z\bar{z}}, \boldsymbol{x}_{\bar{z}} \rangle = 0$$

これと式 (3.3.4) とを比較すると $A = B = 0$，よって $\boldsymbol{x}_{z\bar{z}} = 0$ を得る．したがって $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(X(z) + Y(\bar{z}))$ と書けるが，$\boldsymbol{x}$ は実数値であるから $X(z)$ と $Y(\bar{z})$ の虚部は互いに打ち消し合う．すなわち，互いに共役である．よって

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\, X(z)$$

$\langle X'(z), X'(z) \rangle = \langle \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{x}_z \rangle = 0$ であるから，極小曲面を構成する問題は，$\langle X', X' \rangle = 0$ を満たす正則関数 $X(z)$ を構成する問題に帰着する．$X$ を式 (3.3.2) で与えると，$X' = (\frac{f(1-g^2)}{2}, \sqrt{-1}\frac{f(1+g^2)}{2}, fg)$ であるから

$$\langle X', X' \rangle = \frac{f^2(1-g^2)^2}{4} - \frac{f^2(1+g^2)^2}{4} + f^2g^2 = 0$$

を満たすので，定理の最初の主張は従う．逆に $\langle X', X' \rangle = 0$ とすると，

$$(X_1' + \sqrt{-1}X_2')(X_1' - \sqrt{-1}X_2') = -(X_3')^2$$

であるから，$g = -\frac{X_1' + \sqrt{-1}X_2'}{X_3'} = \frac{X_3'}{X_1' - \sqrt{-1}X_2'}$ とおくとき

$$X_1' = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{g} - g\Big)X_3', \quad X_2' = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Big(\frac{1}{g} + g\Big)X_3'$$

となり，次を得る．

$$X_1 = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{g} - g\Big)X_3'dz, \quad X_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\int\Big(\frac{1}{g} + g\Big)X_3'dz$$

ここで $w = g(z)$ とする．$dw = g'dz$ より，$f = X_3'/gg'$ とおけば

$$X = \Big(\frac{1}{2}\int(1 - w^2)f\,dw,\ \frac{\sqrt{-1}}{2}\int(1 + w^2)f\,dw,\ \int wf\,dw\Big) \tag{3.3.5}$$

を得る．これは式 (3.3.2) で $g(w) = w$ としたものである． □

$$X \times \bar{X} = \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{2}\Big(\sqrt{-1}(g + \bar{g}),\ g - \bar{g},\ \sqrt{-1}(|g|^2 - 1)\Big)$$

より，単位法ベクトルは次で与えられる．

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{1+|g|^2}(2\,\mathrm{Re}\,g,\ 2\,\mathrm{Im}\,g,\ |g|^2-1)$$

立体射影 $(x,y,z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$ で $\boldsymbol{\nu}$ を写すと $(\mathrm{Re}\,g, \mathrm{Im}\,g)$ となるので，$g$ は単位法ベクトルの立体射影像である．

第 1 基本形式は $\lambda = \frac{|f|(1+|g|^2)}{\sqrt{2}}$ で与えられる．主曲率は $\pm 4|g'|/|f|(1+|g|^2)^2$ である．ワイエルシュトラスの表現公式で，実数 $\theta$ に対し $\boldsymbol{x}^\theta = \mathrm{Re}(e^{\theta\sqrt{-1}}X)$ とおくと，極小曲面の 1 径数族ができる．この族は第 1 基本形式を変えないので等長変形と呼ばれる．

**例 3.3.4**　式 (3.3.5) で，$f(w)$ を特別な関数として，実部をとった曲面には名前が付いている．

(1) $f(w) = 2$ のとき次の**エネッパー** (Enneper) **の極小曲面**を得る．

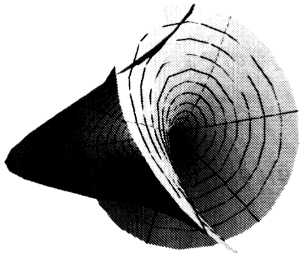
$$(u,v) \mapsto (u(1-u^2/3+v^2),\ -v(1-u^2/3+v^2),\ u^2-v^2)$$

(2) $f(w) = c/w^2$ のとき $X = c(-\frac{w+w^{-1}}{2}, \frac{\sqrt{-1}(w-w^{-1})}{2}, \log w)$ なので $v + u\sqrt{-1} = \log w$ とおくと，$w = e^v(\cos u - \sqrt{-1}\sin u)$ となり懸垂曲面（懸垂線を回転させて得られる曲面）を得る．

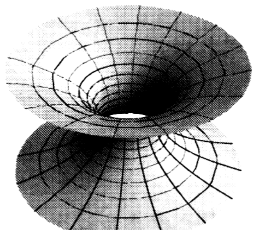
$$(u,v) \mapsto c(-\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ v)$$

(3) $f(w) = \sqrt{-1}c/w^2$ のとき $X = c(-\frac{w+w^{-1}}{2\sqrt{-1}}, -\frac{w-w^{-1}}{2}, \log w)$ なので $v - u\sqrt{-1} = \log w$ とおくと，$w = e^v(\cos u - \sqrt{-1}\sin u)$ となり常螺旋面（例 2.1.7）を得る．

$$(u,v) \mapsto c(\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ u)$$



エネッパー曲面



懸垂曲面

曲面 $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ に対し，原点 0 を頂点とし $\boldsymbol{x}(D)$ を底面とする錐面の体積 $V(\boldsymbol{x})$ を次で定める．

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\rangle du\,dv$$

**補題 3.3.5** $h|_{\partial D} = 0$ と仮定するとき，$V(t) = V_D(\boldsymbol{x}^t)$ と書けば

$$V(t) = V_D(\boldsymbol{x}) + t\iint_D h\,dA + O(t^2)$$

**証明** $V(t)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{\nu}^t\rangle \sqrt{E^tG^t-(F^t)^2}\,du\,dv\\
&= \frac{1}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^t_u \times \boldsymbol{x}^t_v\rangle du\,dv\\
&= \frac{1}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}+th\boldsymbol{\nu}, (\boldsymbol{x}_u + t(h\boldsymbol{\nu})_u) \times (\boldsymbol{x}_v + t(h\boldsymbol{\nu})_v)\rangle du\,dv\\
&= V_D(\boldsymbol{x}) + \frac{t}{3}\iint_D h\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\rangle du\,dv\\
&\quad + \frac{t}{3}\iint_D \langle \boldsymbol{x}, \partial_u(h\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{x}_v + \boldsymbol{x}_u \times \partial_v(h\boldsymbol{\nu})\rangle du\,dv + O(t^2)
\end{aligned}$$

である．ここで

$$\partial_u\langle \boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_v\rangle = \det(\boldsymbol{x}_u, h\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_v) + \det(\boldsymbol{x}, \partial_u(h\boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{x}_v) + \det(\boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_{uv})$$

$$\partial_v\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times h\boldsymbol{\nu}\rangle = \det(\boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{x}_u, h\boldsymbol{\nu}) + \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{uv}, h\boldsymbol{\nu}) + \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u, \partial_v(h\boldsymbol{\nu}))$$

であるから，

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_D(\boldsymbol{x}) + \frac{t}{3}\iint_D h\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\rangle du\,dv\\
&\quad + \frac{t}{3}\iint_D \begin{pmatrix} \partial_u\langle \boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_v\rangle + \partial_v\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times h\boldsymbol{\nu}\rangle \\ -\langle \boldsymbol{x}_u, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_v\rangle - \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{x}_u \times h\boldsymbol{\nu}\rangle \\ -\langle \boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_{uv}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{uv} \times h\boldsymbol{\nu}\rangle \end{pmatrix} du\,dv + O(t^2)
\end{aligned}$$

であるが，グリーンの定理[4]と，$h|_{\partial D} = 0$ より，

---

[4] $C^1$ 関数 $f, g$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial D}(f\,du + g\,dv) = \iint_D (f_v - g_u)du\,dv$.

$$\iint_D (\partial_u \langle \boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_v \rangle + \partial_v \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times h\boldsymbol{\nu} \rangle) du\, dv$$
$$= \int_{\partial D} h(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{\nu} \rangle du - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_v \rangle dv) = 0$$

かつ，$\langle \boldsymbol{x}, h\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{x}_{uv} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{uv} \times h\boldsymbol{\nu} \rangle = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} V(t) &= V_D(\boldsymbol{x}) + \frac{t}{3} \iint_D h \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle du\, dv \\ &\quad + \frac{2t}{3} \iint_D h \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle du\, dv + O(t^2) \\ &= V_D(\boldsymbol{x}) + t \iint_D h \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle du\, dv + O(t^2) \\ &= V_D(\boldsymbol{x}) + t \iint_D h \sqrt{EG - F^2} du\, dv + O(t^2) \end{aligned}$$

よって証明が完了した．　□

$h|_{\partial D} = 0$ かつ $V(t)$ が一定という条件の下で $A(t)$ の極値を求めてみる．$L(t) = A(t) + \lambda(V(t) - V_D(\boldsymbol{x}))$ とおくと，

$$L'(0) = A'(0) + \lambda V'(0) = \iint_D (-2H + \lambda) h \sqrt{EG - F^2} du\, dv$$

なので，任意の $h$ について $V(t)$ が一定という条件の下で $A(t)$ の極値は $H = \lambda/2$（定数）のときである．

### 3.3 節の演習

**演習 3.3.1**　ガウス曲率が 0 でない極小曲面では漸近線が直交することを示せ．

**演習 3.3.2**　閉曲面 $S$ の内部の体積を $V$ とするとき，次を示せ．

$$\iint_S \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle dA = 0 \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ は任意}), \qquad V = \iint_S \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle dA$$

**演習 3.3.3**　補題 3.3.1 の記号の下で，次を示せ．

$$A(t) = A_D(\boldsymbol{x}) - 2t \iint_D Hh\, dA + t^2 \iint_D \Big( \frac{|\nabla h|^2}{2} + h^2 K \Big) dA + O(t^3)$$

特に，曲面 $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ の平行曲面 $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\nu}$ について，

$$A(\boldsymbol{x}^t) = A_D(\boldsymbol{x}) - 2t \iint_D HhdA + t^2 \iint_D Kh^2 dA + O(t^3)$$

**演習 3.3.4** 補題 3.3.5 の記号と仮定の下で，次を示せ．

$$V(t) = V_D(\boldsymbol{x}) + t \iint_D h\,dA + t^2 \iint_D Hh^2 dA + \frac{t^3}{3} \iint_D Kh^3 dA$$

**演習 3.3.5** 前問と前々問の記号の下で，$L(t) = A(t) + \lambda(V(t) - V_D(\boldsymbol{x}))$ を用いて平均曲率一定曲面 $(H = \lambda/2)$ が $V(t)$ が一定という条件下での $A(t)$ の極値（または停留点）を与え，さらにこのとき次が成り立つことを示せ．

$$L(t) = A_D(\boldsymbol{x}) + \frac{t^2}{2} \iint_D [|\nabla h|^2 - h^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]dA + O(t^3)$$

## 3.4 曲面と平面・球面との接触

$C^\infty$ 写像 $H : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ が微分同相であるとは，原点近傍 $U$, $V$ が存在して $H : U \to V$ は全単射で，$H$, $H^{-1}$ は $C^\infty$ であるときをいう．微分同相写像を座標変換と呼ぶこともある．逆写像定理より，$C^\infty$ 写像 $H : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ が微分同相であることはヤコビ行列式 $|\frac{\partial H_i}{\partial x_j}|$ が原点で 0 にならないことと同値である．

■ ***k* ジェット** $k$ を自然数とする．

$$\frac{f(x,y) - g(x,y)}{\|(x,y)\|^k} \to 0 \qquad ((x,y) \to (0,0)) \tag{3.4.1}$$

を満たすとき，$f(x,y) = g(x,y) + o(k)$ と書く．このとき，別の座標 $(u,v)$ を用いて $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と書くとき，ある正定数 $C_1$, $C_2$ が存在して原点近傍で $C_1\|(u,v)\| \leq \|(x,y)\| \leq C_2\|(u,v)\|$ であるので，

$$\frac{f(x(u,v), y(u,v)) - g(x(u,v), y(u,v))}{\|(u,v)\|^k} \to 0 \qquad ((x,y) \to (0,0))$$

が成り立つ．よって，式 (3.4.1) を $f = g + o(k)$ と書いても曖昧さはない．

$\mathbb{R}^2$ の原点近傍で定義されている任意の $C^\infty$ 関数 $f(u,v)$ に対し，テイラーの定理より，次の条件を満たす $u, v$ の $k$ 次多項式 $T_k(u,v)$ が存在する．

$$f(u,v)=T_k(u,v)+o(k)$$

このとき $T_k(u,v)$ を $f$ の原点での $k$ **ジェット**という．

$k$ ジェット $T_k(u,v)$ は座標変換 $u=u(v',v')$, $v=v(v',v')$ によって変わってしまう．しかし 2 つの関数 $f$, $g$ が同じ $k$ ジェットをもつという性質は座標変換では変わらないことに注意しておこう．

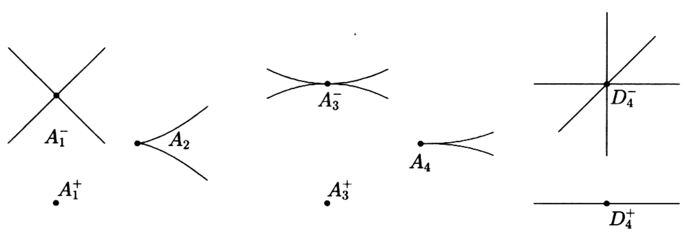
2 つの関数 $f$, $g$ が同じ $k$ ジェットをもつとき $f=g+o(k)$ と書く．

■ **特異点の判定**　変数 $x,y$ の $C^\infty$ 関数 $f(x,y)$ を考える．$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点を $f(x,y)$ の特異点という．特異点でない点は正則点と呼ばれ，例えば $f_y(0,0)\neq 0$ ならば，陰関数定理より原点近傍で $f(x,\varphi(x))=0$ を満たす $C^\infty$ 関数 $\varphi(x)$ が存在する．以後，原点 $(0,0)$ は関数 $f(x,y)$ の特異点である，すなわち $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ が成り立つとしよう．

原点近傍で定義された 2 つの関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が**右同値**である（または単に**同値**である）とは，ある原点近傍の座標変換 $\phi:(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ が存在して，$f=g\circ\phi$ となるとき，すなわち $f(u,v)=g(x(u,v),y(u,v))$ が成り立つときをいう．

$y^2\pm x^{k+1}$ を $\boldsymbol{A_k}$ **特異点**といい，$k$ が奇数のときは符号に対応して $A_k^+$, $A_k^-$ 特異点という．$y(y^2\pm x^2)$ を $D_4^\pm$ 特異点，$D_4^+$ と $D_4^-$ を併せて $\boldsymbol{D_4}$ **特異点**という．

これらの関数の零点集合を図に示す．




すべての正整数 $k$ に対し $f\circ\phi=g+o(k)$ を満たすような原点近傍の座標変換 $\phi$ が存在するとき，$f$ と $g$ は**形式右同値**であるという．$f$ と $g$ が右同値であれば，形式右同値になる．

$g = f + o(k)$ を満たす任意の $g$ に対し $f \circ \phi = g$ を満たすような原点近傍の座標変換 $\phi$ が存在すれば，$f$ は $k$ 次確定関数と呼ばれる．ある $k$ に対して $k$ 次確定な関数は有限確定な関数であるという．有限確定な 2 つの関数については，形式右同値ならば右同値である．

本書では証明しないが，$y^2 \pm x^{k+1}$ は $k+1$ 次確定，$y(y^2 \pm x^2)$ は 3 次確定であることを注意しておく．

形式右同値の概念は自然に形式ベキ級数について拡張できる．形式ベキ級数のこの意味での右同値について，まず次の事実を示す．

**定理 3.4.1**

(1) 次の形式ベキ級数 $P$ は $y^2 \pm x^{k+1}$（$A_k$ 特異点）に形式右同値である．

$$P = y^2 \pm x^{k+1} + \sum_{2i+(k+1)j>2(k+1)} \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j$$

(2) 次の形式ベキ級数 $P$ は $x(y^2 \pm x^2)$（$D_4$ 特異点）に形式右同値である．

$$P = y(y^2 \pm x^2) + \sum_{i+j \geq 4} \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j$$

証明の前に式変形に関する準備をしよう．$p$, $q$ を正の整数とし，$(p,q)$ を重みと呼んで固定する．形式ベキ級数

$$P(x,y) = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j \tag{3.4.2}$$

に対し，$d(P) = \min\{pi + qj : a_{ij} \neq 0\}$ とおき，$P$ の重み付き次数と呼ぶ．$d(P) \geq k$ なる形式ベキ級数 $P$ 全体を $\mathcal{A}_k$ 書く．式 (3.4.2) で定まる $P$ に対し，

$$H_P = \sum_{pi+qj=d} \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j, \qquad d = d(P)$$

$$K_P = \sum_{pi+qj=k} \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j, \qquad k = d(P - H(P))$$

とおくと，$P = H_P + K_P + R$ $(R \in \mathcal{A}_{k+1})$ と書ける．

**補題 3.4.2** $K_P(x,y) + \xi(H_P)_x(x,y) + \eta(H_P)_y(x,y) = 0$ なる多項式 $\xi$, $\eta$ が存在すれば，$\delta = k - d$ として，次が成り立つ．

$$P(x+\xi, y+\eta) = H_P(x,y) + T \qquad (T \in \mathcal{A}_{d+\delta+1})$$

**証明**　重み $(p,q)$ に関する $\xi$ の $p+\delta$ 次の項，$\eta$ の $q+\delta$ 次の項を改めて $\xi, \eta$ とおけば，$d(\xi) = \delta + p$, $d(\eta) = \delta + q$ と仮定してよい．$d((\xi\partial_x + \eta\partial_y)x^i y^j) = \delta + pi + qj$ なので，テイラーの定理より，

$$P(x+\xi, y+\eta) = P(x,y) + \xi P_x(x,y) + \eta P_y(x,y) + S \qquad (S \in \mathcal{A}_{d+2\delta})$$

と書ける．右辺を書き換えると，

$$P(x+\xi, y+\eta) = H_P(x,y) + K_P(x,y) + \xi(H_P)_x(x,y) + \eta(H_P)_y(x,y) + T$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned} T = R &+ \xi(K_P)_x(x,y) + \eta(K_P)_y(x,y) \\ &+ \xi R_x(x,y) + \eta R_y(x,y) + S \in \mathcal{A}_{d+\delta+1} \end{aligned}$$

である．　□

**定理 3.4.1 の証明**　(1) $H = y^2 \pm x^{k+1}$, $(p,q) = (2, k+1)$ とおく．$H_x = \pm(k+1)x^k$, $H_y = 2y$ なので，$pi + qj = 2(k+1) + \delta$ $(\delta > 0)$ を満たす $x^i y^j$ は $H_x$ と $H_y$ の多項式係数の 1 次結合で書けるので，前補題より定理は証明できた．

(2) $H = y(y^2 \pm x^2)$, $(p,q) = (1,1)$ とおく．仮定より $P = H + o(3)$ である．$P_k = H + o(k)$ と仮定して $P_k \circ \phi = H + o(k+1)$ を満たす座標変換 $\phi$ を構成すればよい．$P_k$ に項 $cx^{k+1}$ があれば，次より $y$ を $y - cx^{k-1}$ に置き換えて，この項は消すことができる．

$$(y - cx^{k-1})[(y - cx^{k-1})^2 \pm x^2] = y(y^2 \pm x^2) - cx^{k+1} - 3cx^{k-1}y^2 + o(k+2)$$
$$x^i(y - cx^{k-1})^{k+1-i} = x^i y^{k+1-i} + o(k+1) \qquad (0 \le i \le k)$$

$H_x = \pm 2xy$, $H_y = 3y^2 \pm x^2$ なので，$x^i y^{k+1-i}$ $(0 \le i \le k)$ の項は $H_x$ と $H_y$ の多項式係数の 1 次結合で書ける．よって，前補題より定理は証明できた．　□

■ **接触**　曲面 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ が点 $P \in S$ で非特異であれば $(F_x, F_y, F_z)(P) \neq (0,0,0)$ である．点 $P$ の近傍で $F$ が座標系の一

部になるから，点 $P$ の近傍で定義された $C^\infty$ 関数 $G$ が $G|_S = 0$ を満たせば，$G = AF$ を満たす $C^\infty$ 関数 $A$ が存在[5]する．

$\mathbb{R}^3$ の曲面 $S_i$, $T_i$ $(i = 1,2)$ が原点を含むとする．$(S_1, T_1)$ と $(S_2, T_2)$ が原点で同じ接触をするとは，微分同相写像 $\Phi : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ が存在して $\Phi(S_1) = S_2$, $\Phi(T_1) = T_2$ となるときをいう．

$S_i$ を径数付け $\boldsymbol{x}_i : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ で表示し，$T_i = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^3, 0) : f_i(x,y,z) = 0\}$ とするとき，次の接触写像を考える．

$$f_i \circ \boldsymbol{x}_i : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}, 0) \qquad (i = 1, 2)$$

**定理 3.4.3**　次は同値である．

(a) $(S_1, T_1)$ と $(S_2, T_2)$ は同じ接触をする．

(b) $f_1 \circ \boldsymbol{x}_1$ と $f_2 \circ \boldsymbol{x}_2$ は接触同値．

ここで，$f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ と $g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が**接触同値**[6]であるとは，微分同相写像 $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ と，0 にならない関数 $A(u,v)$ が存在して，$f \circ \phi(u,v) = A(u,v) g(u,v)$ とできるときをいう．明らかに，2 つの関数が右同値ならば接触同値である．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$(b): 座標変換 $\Phi : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ が在って $\Phi(S_1) = S_2$, $\Phi(T_1) = T_2$ となるとき，$\Phi \circ \boldsymbol{x}_1(u,v) = \boldsymbol{x}_2(\phi(u,v))$ なる座標変換 $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ が存在する．また $\Phi(f_1^{-1}(0)) = f_2^{-1}(0)$ より $f_1^{-1}(0) = (f_2 \circ \Phi)^{-1}(0)$ であり，

$$A(x,y,z) f_1(x,y,z) = f_2 \circ \Phi(x,y,z)$$

を満たす関数 $A(x,y,z)$ が存在する．これに $(x,y,z) = \boldsymbol{x}_1(u,v)$ を代入すると，

$$A(\boldsymbol{x}_1(u,v)) f_1 \circ \boldsymbol{x}_1(u,v) = f_2 \circ \Phi \circ \boldsymbol{x}_1(u,v) = f_2 \circ \boldsymbol{x}_2(\phi(u,v))$$

となり，$f_1 \circ \boldsymbol{x}_1$ と $f_2 \circ \boldsymbol{x}_2$ は接触同値．

(b) $\Longrightarrow$(a): まず $S_i$, $T_i$ を次のように書く．

---

[5]アダマールの補題を用いる．

[6]$\mathcal{K}$ 同値ということもある．

$$S_i = \{(x,y,z) : z = f_i(x,y)\}, \quad T_i = \{(x,y,z) : z = g_i(x,y)\} \quad (i=1,2)$$

座標変換 $\psi_i : (x,y,z) \mapsto (X,Y,Z) = (x,y,z-g_i(x,y))$ を合成すると，

$$\psi_i(S_i) = \{Z = f_i(X,Y) - g_i(X,Y)\}, \quad \psi_i(T_i) = \{Z = 0\}$$

となるので $g_i = 0$（すなわち $T_i = \{z=0\}$）と仮定してよい．このとき $f_i : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が接触写像である．$f_1$ と $f_2$ が接触同値とすると，微分同相 $\phi : (\mathbb{R}^2,0) \to (\mathbb{R}^2,0)$ と 0 にならない関数 $A(u,v)$ が存在して $f_2 \circ \phi(u,v) = A(u,v) f_1(u,v)$ とできる．すると，

$$\Phi : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0), \qquad (x,y,z) \mapsto (\phi(x,y), A(x,y)z)$$

は微分同相写像で，$\Phi(S_1) = S_2$, $\Phi(T_1) = T_2$ が成り立つ．実際，$(x',y',z') = \Phi(x,y,z)$ と書くと $(x',y') = \phi(x,y)$, $z' = A(x,y)z$ なので

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) \in S_2 &\iff z' = f_2(x',y') \iff A(x,y)z = f_2(\phi(x,y)\\ &\iff z = f_1(x,y) \iff (x,y,z) \in S_1\end{aligned}$$

□

■ **峰点**　曲面 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ に対し，$\kappa_1$, $\kappa_2$ をその主曲率，主ベクトル（対応する主方向を表す長さ 1 のベクトル）を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とする．

$i=1$ または 2 とする．$\boldsymbol{v}_i\kappa_i = 0$ なる点を $\boldsymbol{v}_i$ **峰点** ($\boldsymbol{v}_i$-ridge) という（$\boldsymbol{v}_i$ に対する峰点ということもある）．峰点には次のようにして次数を定義できる．$\boldsymbol{v}_i\kappa_i = 0$, ${\boldsymbol{v}_i}^2\kappa_i \neq 0$ を満たす点を **1 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点**という．$\boldsymbol{v}_i\kappa_i = {\boldsymbol{v}_i}^2\kappa_i = 0$, ${\boldsymbol{v}_i}^3\kappa_i \neq 0$ を満たす点を **2 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点**という．

峰点の概念は 1971 年に，ポーチャス (Porteous) によって初めて定義された．

原点が臍点でないとして，モンジュの標準形（2.7.1 節）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(u,v) &= (u,v,f(u,v)),\ f(u,v)\\ &= \frac{1}{2}(k_1u^2 + k_2v^2) + \sum_{3 \le i+j \le k} \frac{a_{ij}}{i!j!}u^iv^j + o(k)\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

で主曲率 $\kappa_i$ のテイラー展開は，式 (2.7.1) を用いて計算すると，

$$\kappa_1 = k_1 + a_{30}u + a_{21}v + o(1), \qquad \kappa_2 = k_2 + a_{12}u + a_{03}v + o(1)$$

となる．$\kappa_1$ の $u^2$, $uv$, $u^3$ の係数は順に次のようになる．

$$\frac{1}{2}(a_{40} - 3{k_1}^3) + \frac{{a_{21}}^2}{k_1 - k_2}, \quad a_{31} + \frac{a_{21}a_{12}}{k_1 - k_2},$$
$$\frac{a_{50}}{6} - 3a_{30}k_1^2 + \frac{a_{21}a_{31}}{k_1 - k_2} + \frac{a_{21}^2(a_{12} - a_{30})}{(k_1 - k_2)^2}$$

主ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ のテイラー展開も，式 (2.7.2) を用いて計算すると，

$$\boldsymbol{v}_1 = (1 + o(1))\partial_u + \frac{1}{k_1 - k_2}(a_{21}u + a_{12}v + o(1))\partial_v$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{k_2 - k_1}(a_{21}u + a_{12}v + o(1))\partial_u + (1 + o(1))\partial_v$$

となる．$\boldsymbol{v}_1$ の $u^2\partial_u$, $u^2\partial_v$ の係数はそれぞれ

$$-\frac{k_1^2}{2} - \frac{a_{21}^2}{2(k_1 - k_2)^2}, \qquad \frac{a_{31}}{2(k_1 - k_2)} + \frac{a_{21}(a_{12} - a_{30})}{(k_1 - k_2)^2}$$

であり，計算すると，次を得る．

$$\boldsymbol{v}_1\kappa_1(0,0) = a_{30}, \qquad \boldsymbol{v}_1^2\kappa_1(0,0) = a_{40} - 3k_1^3 + \frac{3a_{21}^2}{k_1 - k_2}$$

$$\boldsymbol{v}_1^3\kappa_1(0,0) = a_{50} - 19a_{30}k_1^2 + \frac{10a_{21}a_{31}}{k_1 - k_2} + \frac{3a_{21}^2(5a_{12} - 3a_{30})}{(k_1 - k_2)^2}$$

これにより，1 次の $\boldsymbol{v}_1$ 峰点，2 次の $\boldsymbol{v}_1$ 峰点の条件を式 (3.4.3) の係数の条件で与えることができる．

**■ 平面との接触：高さ関数の特異点** 長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとすると，原点を含む平面の定義方程式は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ である．この左辺に曲面の径数表示 $(x, y, z) = \boldsymbol{x}(u, v)$ を代入して得られる次の関数を考える．

$$h(u, v) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(u, v) \rangle$$

偏微分すると $h_u = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_u \rangle$, $h_v = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_v \rangle$ である．$h_u(u, v) = h_v(u, v) = 0$ となるのは，$\boldsymbol{a}$ が曲面の単位法ベクトル ($\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{\nu}(0, 0)$) であることと同値である．

**定理 3.4.4**　$\boldsymbol{a}$ が曲面の単位法ベクトルとする.

(1) $(0,0)$ が放物的点でないとき，$h(u,v)$ が $(0,0)$ で $A_1$ 特異点.

(2) $(0,0)$ が放物的点で $\kappa_i(0,0)=0$, $\kappa_j(0,0)\neq 0$ $(i\neq j)$ であり，$\boldsymbol{v}_i$ 峰点でないとき，$h(u,v)$ が $(0,0)$ で $A_2$ 特異点.

(3) $(0,0)$ が放物的点で $\kappa_i(0,0)=0$, $\kappa_j(0,0)\neq 0$ $(i\neq j)$ であり，1次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点のとき，$h(u,v)$ が $(0,0)$ で $A_3$ 特異点.

(4) $(0,0)$ が放物的臍点で，すなわち $\kappa_1(0,0)=\kappa_2(0,0)=0$ であり，$C$ が重根をもたないとき，$h(u,v)$ が $(0,0)$ で $D_4$ 特異点. ただし，$C$ はモンジュ標準形 (3.4.3) の $f$ の 3 次同次部分で $C(u,v)=\frac{1}{6}(a_{30}u^3+3a_{21}u^2v$ $+3a_{12}uv^2+a_{03}v^3)$.

**証明**　$(0,0)$ で

$$\det\begin{pmatrix} h_{uu} & h_{uv} \\ h_{uv} & h_{vv}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_{uu}\rangle & \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_{uv}\rangle \\ \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_{uv}\rangle & \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_{vv}\rangle\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}$$

となり，ヘッセ行列が退化するのは，$(0,0)$ が曲面の放物的点のときである. モンジュ標準形を使うと，$\boldsymbol{a}=(0,0,1)$ として，次を得る.

$$h(u,v)=\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)+C(u,v)+\cdots$$

後は定理 3.4.1 を使えばよい. □

**■ 球面との接触：距離 2 乗関数の特異点**　点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ を中心とする半径 $r$ の球の定義方程式は $\|(x,y,z)-(a,b,c)\|^2-r^2=0$ である. この左辺に曲面の径数表示 $(x,y,z)=\boldsymbol{x}(u,v)$ を代入し，$-\frac{1}{2}$ 倍して得られる次の関数を考える.

$$\phi(u,v)=-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}(u,v)-\boldsymbol{a}\|^2-r^2)$$

$\phi_u=\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_u\rangle$, $\phi_v=\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_v\rangle$ なので，これらが 0 となるのは $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}$ が曲面の接ベクトル $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ に直交するときであり，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}(0,0)=\rho\boldsymbol{\nu}(0,0)$ なる実数 $\rho$ が存在することと同値である.

**定理 3.4.5**　このとき，

(1) $\rho$ が主曲率半径でないとき，$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で $A_1$ 特異点.

(2) $(0,0)$ が臍点でなく $\rho$ が主曲率半径（ここでは $\rho = 1/\kappa_i(0,0)$）とする．

(a) $(0,0)$ が $\boldsymbol{v}_i$ 峰点でなければ $\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で $A_2$ 特異点．

(b) $(0,0)$ が 1 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点ならば $\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で $A_3$ 特異点．

(c) $(0,0)$ が 2 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点ならば $\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で $A_4$ 特異点．

(3) $(0,0)$ が臍点で放物的でなく，$\rho$ が主曲率半径かつ $C$ が重根をもたなければ，$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で $D_4$ 特異点．ただし，$C$ はモンジュ標準形 (3.4.3) の $f$ の 3 次同次部分である．

**証明** モンジュ標準形で計算すると，

$$
\begin{aligned}
\phi(u,v) &= -\frac{1}{2}(|(u,v,f(u,v)-\rho)|^2 - \rho^2) \\
&= \rho f(u,v) - \frac{1}{2}(u^2+v^2+f(u,v)^2) \\
&= \frac{1}{2}\Big[(\rho k_1 - 1)u^2 + (\rho k_2 - 1)v^2\Big] \\
&\quad + \frac{\rho}{6}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) \\
&\quad + \frac{1}{24}\begin{bmatrix} (\rho a_{40} - 3k_1^2)u^4 + 4\rho a_{31}u^3 v \\ +6(\rho a_{22} - k_1k_2)u^2v^2 + 4\rho a_{13}u^3 v + (\rho a_{04} - 3k_2^2)v^4 \end{bmatrix} + \cdots
\end{aligned}
$$

原点での $\phi$ のヘッセ行列 $\left(\begin{smallmatrix}\rho k_1 - 1 & 0 \\ 0 & \rho k_2 - 1\end{smallmatrix}\right)$ が退化するのは $\rho$ がある主曲率半径と一致するときで，ヘッセ行列の核方向は対応する主方向である．$\rho = 1/k_1$ として，$k_1 \neq k_2$（臍点でない）と仮定しよう．$\boldsymbol{v}_1$ 峰点でなければ $a_{30} \neq 0$ で $\phi$ は $A_2$ 特異点である．$\boldsymbol{v}_1$ 峰点ならば $a_{30} = 0$ で

$$
\begin{aligned}
\phi(u,v) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{k_2}{k_1} - 1\Big)v^2 + \frac{a_{21}}{2k_1}u^2 v + \Big(\frac{a_{40}}{k_1} - 3k_1^2\Big)u^4 + \sum_{i+2j>4}\frac{a_{ij}}{i!j!}u^i v^j \\
&= \frac{k_2 - k_1}{2k_1}\Big(v - \frac{a_{21}}{2(k_2-k_1)}v^2\Big)^2 + \Big(\frac{a_{40} - 3k_1^3}{24} - \frac{{a_{21}}^2}{8(k_2-k_1)}\Big)u^4 \\
&\quad + \sum_{i+2j>4}\frac{a_{ij}}{i!j!}u^i v^j
\end{aligned}
$$

であるから，$\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1(0) \neq 0$ ならば $u^4$ の係数が 0 でなく，$A_2$ 特異点である．$\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1(0,0) = 0$ のときは詳細は略すが，$\boldsymbol{v}_1^3\kappa_1(0,0) \neq 0$ ならば $u^5$ の係数は 0 でなく，$A_4$ 特異点である．$k_1 = k_2 \neq 0$ のときは，$\rho = 1/k_1$ とおけば，$\phi$ の 2 次の項がすべて消え，3 次の部分が重根をもたなければ $D_4$ 特異点である．□

## 3.5　ポアンカレ・ホップの定理

今迄は，主に $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を考えてきたが，本節では，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているとは限らない曲面を考える．

正確にいうと，$S$ が**曲面**であるとは，次の条件を満たすときをいう．

(i) $S$ はハウスドルフ位相空間である．

(ii) $S$ の各点 $\boldsymbol{p}$ に対し，$\boldsymbol{p}$ の近傍 $V$，$\mathbb{R}^2$ の開集合 $U$ と同相写像 $\varphi : V \to U$ が存在する．$V$ を $\boldsymbol{p}$ の**座標近傍**，$\varphi$ を**座標**，$(V, \varphi)$ を**座標系**（または**局所座標系**）と呼ぶ．写像 $\varphi^{-1} : U \to S$ を**径数付け**と呼ぶ．

(iii) (ii) の条件を満たす任意の 2 つの座標 $\varphi_1 : V_1 \to U_1$, $\varphi_2 : V_2 \to U_2$ に対し，$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ は $C^\infty$ 写像，$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ を**座標変換**（または**貼り合せ写像**）と呼ぶ．

特に，コンパクトな曲面を**閉曲面**と呼ぶ．

曲面 $S$ 上の点 $\boldsymbol{p}$ に対し，$\boldsymbol{p} = \varphi_1^{-1}(u_1, v_1) = \varphi_2^{-1}(u_2, v_2)$ なるとき，$(u_1, v_1)$ を始点とするベクトル $\boldsymbol{v}_1 = a_1 \partial_u + b_1 \partial_v$ と $(u_2, v_2)$ を始点とするベクトル $\boldsymbol{v}_2 = a_2 \partial_u + b_2 \partial_v$ を（$d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2$ を満たすとき）同一視する．同値類を曲面 $S$ の点 $\boldsymbol{p}$ での接ベクトルといい，それら全体を曲面 $S$ の点 $\boldsymbol{p}$ での接空間という．接空間はベクトル空間になる．各接空間に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,\ E = \langle \partial_u, \partial_u \rangle,\ F = \langle \partial_u, \partial_v \rangle,\ G = \langle \partial_v, \partial_v \rangle$$

で第 1 基本形式を定める．$E$, $F$, $G$ が $(u, v)$ に関して $C^\infty$ 級と仮定すれば，定理 2.5.1 中の式でガウス曲率 $K$ を定めることができる．$S$ 上の曲線 $\gamma(t)$ の弧長変数 $s$ が $ds/dt = |d\gamma/dt|$ で定まり，曲線の曲面内での単位法ベクトル $\boldsymbol{n}_g$ を用いれば，曲線の測地的曲率も式 (2.4.7) で定まる．測地線や各点における測地的極座標も定義され，定理 2.6.5 での計算も第 1 基本形式だけに依存する計算に読み替えることができる．

### 3.5.1 ベクトル場

曲面 $S$ の各点 $\boldsymbol{p}$ に対し $\boldsymbol{p}$ を始点とする $S$ の接ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ が与えられたとき，曲面 $S$ に**ベクトル場** $\boldsymbol{v}$ が与えられたという．ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は，曲面の径数付け $\boldsymbol{x} : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ に対し，ある関数 $a(u,v)$, $b(u,v)$ を用いて，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(u,v) = a(u,v)\boldsymbol{x}_u(u,v) + b(u,v)\boldsymbol{x}_v(u,v)$$

と書くことができる．

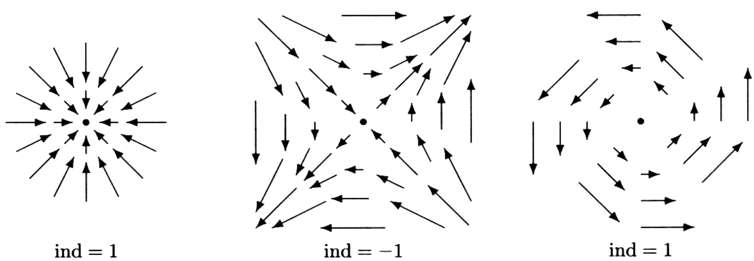
$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ が零ベクトルであるような点 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{v}$ の特異点という．

$\boldsymbol{v}$ の特異点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で径数付け $\boldsymbol{x} : U \to S$ をとる．ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{x}_u$ となす角を $\theta$ とする．$\boldsymbol{p}$ の周りを正の向きに 1 周する閉曲線を $\alpha : [0,l] \to S$ とし，$D$ を $\alpha$ で囲まれる領域とする．$D \subset \boldsymbol{x}(U)$ とし，$D$ には $\boldsymbol{p}$ 以外の $\boldsymbol{v}$ の特異点はないと仮定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ の点 $\boldsymbol{p}$ における**指数** $\mathrm{ind}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})$ を

$$\mathrm{ind}(\boldsymbol{v},p) = \frac{\theta_\alpha(l) - \theta_\alpha(0)}{2\pi} \tag{3.5.1}$$

で定める．ここで，$\theta_\alpha(t)$ は $t$ に関して連続な関数で，点 $\alpha(t)$ でベクトル $\boldsymbol{x}_u$ と $\boldsymbol{v}(\alpha(t))$ のなす（向き付けられた）角度が $\theta_\alpha(t)$ であるとしている．

**例 3.5.1** 平面のベクトル場の例を図示する．




**補題 3.5.2** 指数 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{v},p)$ はうまく定義されている，すなわち，径数付け $\boldsymbol{x} : U \to S$，閉曲線 $\alpha$ の選び方によらない．

**証明** $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{x}_u$ の角度を 2 種類とるとき，その差は $2\pi$ の整数倍であるので，指数の定義が角度の選び方によらないのは明らかである．

$\alpha(0)$ を始点とするベクトル $\boldsymbol{w}_0$ を $\alpha(s)$ に沿って平行移動して得られるベク

トル場を $\boldsymbol{w}(s)$ と書き，$\boldsymbol{x}_u(u(s), v(s))$ と $\boldsymbol{w}(s)$ のなす角を $\varphi(s)$ で表す．演習 2.6.2 より

$$\frac{1}{2\pi}\iint_D K\,dA = \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{2\pi} \tag{3.5.2}$$

となる．式 (3.5.1) から式 (3.5.2) を引くと，

$$\mathrm{ind}(\boldsymbol{v}, p) - \frac{1}{2\pi}\iint_D K\,dA = \frac{\theta_\alpha(l) - \varphi(l)}{2\pi} - \frac{\theta_\alpha(0) - \varphi(0)}{2\pi} \tag{3.5.3}$$

を得る．$\theta_\alpha - \varphi$ は $\boldsymbol{x}_u$ に依存しないことに注意しよう．つまり，$\theta_\alpha - \varphi$ は径数付け $\boldsymbol{x} : U \to S$ によらず定義される量である．

指数が閉曲線 $\alpha$ の選び方に依存しないことを示そう．まず，定義が閉曲線 $\alpha$ の径数 $t$ の取り方によらないことを示す．$g$ を単調増加関数として $u = g(t)$ とすると，$\beta(u) = \alpha{\circ}g^{-1}(u)$ は $[g(0), g(l)]$ で定義された閉曲線である．$\theta_\alpha(l) - \theta_\alpha(0) = \theta_\beta(g(l)) - \theta_\beta(g(0))$ なので，主張は従う．

$\alpha_0$ と $\alpha_1$ を定義の条件を満たす閉曲線とする．この 2 つの曲線を用いて定義した指数が一致することを示そう．まず，$\alpha_0$ と $\alpha_1$ が交わらないと仮定する．$\alpha_0$ は $\alpha_1$ の囲む領域の内部にあると仮定して示す．このとき，特異点の近傍 $U$ と，原点中心の半径 1 の円盤 $B^2$ への同相写像 $h : U \to B^2$ で，$\alpha_0$ の像が原点中心の半径 1/3 の円，$\alpha_2$ の像が原点中心の半径 2/3 の円，となるものをとる．さらに必要なら径数を取り替えて $\alpha_0$, $\alpha_1$ をそれぞれ $h{\circ}\alpha_0(t)$, $h{\circ}\alpha_1(t)$ の偏角 $\theta$ で径数付けられているとしてよい．すると，

$$\alpha_t(\theta) = h^{-1}\left(\frac{1+t}{3}\cos\theta, \frac{1+t}{3}\sin\theta\right) \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

は $\alpha_0$ と $\alpha_1$ を連続的に結ぶ曲線族である．指数

$$\frac{\theta(\alpha_t(l)) - \theta(\alpha_t(0))}{2\pi}$$

は $t$ に関して連続に変わるが，この値は整数値しかとりえないので定数でなければならない．閉曲線 $\alpha_0$, $\alpha_1$ が交わるときは，定義の条件を満たす第 3 の閉曲線で $\alpha_0, \alpha_1$ 双方に交わらないものをとり，前述の議論を繰り返せばよい．□

**定理 3.5.3（ポアンカレ・ホップの定理）**　閉曲面 $S$ にベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が定義されていて，それは有限個の特異点 $p_1, \cdots, p_n$ をもつとする．このとき

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(\boldsymbol{v}, p_i)$$

**証明** 閉曲面 $S$ に有限個の特異点をもつベクトル場 $\boldsymbol{v}$ があるとき，各3角形には $\boldsymbol{v}$ の特異点が内点に高々1つであるように $S$ を有限個の3角形に分割すると，各3角形ごとに式 (3.5.3) が成立する．これをすべての3角形について足し合わせると，右辺は0になる．なぜなら，3角形分割に現れる各辺に対し，向きを変えて2回足し合わせることになるからである． □

### 3.5.2 方 向 場

曲面の各点に方向が与えられているとき，曲面に**方向場**が与えられているという．曲面上の0でない1形式は，方向場を定める．実際，$\mathbb{R}^2$ 上の1形式 $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ があれば，この1形式は点 $(x,y)$ を始点にするベクトル $-b(x,y)\partial_x + a(x,y)\partial_y$ の定数倍すべてを0にする[7]．よって1形式 $\omega$ は各点に方向を定めると見ることができる．1形式がある点で0であれば，その点はその1形式が定める方向場の特異点であるという．

$\omega = 0$ は $b(x,y) \neq 0$ のとき微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)} \qquad \left(a(x,y) \neq 0 \text{ のときは } \frac{dx}{dy} = -\frac{b(x,y)}{a(x,y)}\right)$$

を定める．$x, y$ を時間 $t$ の関数として，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -b(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = a(x,y)$$

の解曲線[8]が，$\omega = 0$ の解を定めると見ることもできる．$a(x,y) = b(x,y) = 0$ なる点 $(x,y)$ を $\omega = 0$ の特異点という．特異点でないときは微分方程式の解の存在と一意性に関する定理より解は分岐しないが，特異点では解の分岐が起こり得る．まず典型的な特異点の例を挙げよう．

**例 3.5.4** $a_{10}, a_{01}, b_{10}, b_{01}$ を実数とするとき，方程式

---

[7] 1形式はベクトルに対しスカラーを対応させるもので，$dx(\partial_x) = dy(\partial_y) = 1$，$dx(\partial_y) = dy(\partial_x) = 0$ と約束している．

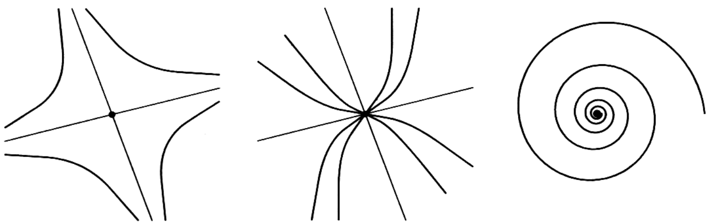
[8] ベクトル場 $-b(x,y)\partial_x + a(x,y)\partial_y$ の積分曲線と見ることもできる．

$$\omega = (a_{10}x + a_{01}y)dx + (b_{10}x + b_{01}y)dy = 0 \tag{3.5.4}$$

のフローは線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -(b_{10}x + b_{01}y), \quad \frac{dy}{dt} = a_{10}x + a_{01}y$$

の解曲線であるから，具体的に解くことができる．解き方の解説は微分方程式の教科書に譲るが，そのフローは行列 $\begin{pmatrix} -b_{10} & -b_{01} \\ a_{10} & a_{01} \end{pmatrix}$ の 2 つの固有値が符号の異なる実数ならば**鞍点** (saddle)，同符号の実数ならば**結節点** (node)，実部が 0 でない共役な複素数ならば**焦点** (focus) と呼ばれる特異点をもつ．



鞍点　　　　結節点　　　　焦点

**定理 3.5.5**　1 形式 $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ は $a(0,0) = b(0,0) = 0$ のとき原点を特異点にもつが，その特異点型は次のようになる．

- 原点で $a_x b_y - a_y b_x < 0$ であれば鞍点．
- 原点で $a_x b_y - a_y b_x > 0$, $a_x b_y < (\frac{a_y + b_x}{2})^2$ であれば結節点．
- 原点で $a_x b_y - a_y b_x > 0$, $a_x b_y > (\frac{a_y + b_x}{2})^2$, $a_y \neq b_x$ であれば焦点．

**証明**　行列 $A = \begin{pmatrix} -b_x(0,0) & -b_y(0,0) \\ a_x(0,0) & a_y(0,0) \end{pmatrix}$ の固有値は，

$$\frac{a_y(0,0) - b_x(0,0)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_y(0,0)+b_x(0,0)}{2}\right)^2 - a_x(0,0)b_y(0,0)}$$

で与えられる．$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -b(x,y) \\ a(x,y) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．仮定より固有値の実部が 0 でないので，線形化定理[9]より $\mathbb{R}^2$ のある原点近傍 $U$ から $\mathbb{R}^2$ の別の原点近傍

[9]常微分方程式の特異点に関する基本定理で Hartman-Grobman の定理として参照されることも多い．証明については，例えば C. Chicone, *Ordinary Differential Equation with Applica-*

$V$ への連続全単射 $h : U \to V$ で，逆が連続であり，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ の解曲線を $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の解曲線に写すものが存在する． □

方程式 $(a_x(0,0)x + a_y(0,0)y)x + (b_x(0,0)x + b_y(0,0)y)y = 0$ は，正定値な 2 次形式でなければ，原点を通るいくつかの直線を定義する．この直線を特性方向という．

**補題 3.5.6** 原点に到達するフローの接方向の極限は，存在すれば，特性方向である．

**証明** $x = x(t)$, $y = y(t)$ を $(x(0), y(0)) = (0,0)$ なる $\omega = 0$ の解とすると，コーシーの平均値の定理より，

$$x(t) = x'(\theta t)t, \quad y(t) = y'(\theta t)t \qquad (0 < \theta < 1)$$

を満たす $\theta$ が存在する．

$$\begin{aligned} 0 &= a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t) \\ &= a(x'(\theta t)t, y'(\theta t)t)x'(t) + b(x'(\theta t)t, y'(\theta t)t)y'(t) \\ &= t[a_1(x'(\theta t), y'(\theta t))x'(t) + b_1(x'(\theta t), y'(\theta t))y'(t) + o(t) \end{aligned}$$

なので $(x'(0), y'(0)) = \lim_{t\to 0}(x'(t), y'(t))$ は，存在すれば，特性方程式の解になる．よって，原点に到達するフローの接方向の極限は特性方向である． □

原点での $a_x b_y - (a_y + b_x)^2/4$ の値がこの特性方向の方程式の判別式であることに注意しておこう．

方向場の特異点 $\boldsymbol{p}$ が孤立していれば $\boldsymbol{p}$ での方向場の**指数**が式 (3.5.1) と同様に定義される．すなわち，方向の定める角度を $\theta$ とするとき，特異点 $p$ を正の向きに 1 周する閉曲線を $\alpha : [0, l] \to S$ とし，$D$ を $\alpha$ で囲まれる領域とする．$D \subset \boldsymbol{x}(U)$ とし，$D$ には $\boldsymbol{\omega}$ の特異点は $\boldsymbol{p}$ ただ 1 つと仮定する．このとき，$\boldsymbol{\omega}$ の特異点 $\boldsymbol{p}$ における**指数** $\mathrm{ind}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{p})$ を次で定める．

$$\mathrm{ind}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{p}) = \frac{\theta_\alpha(l) - \theta_\alpha(0)}{2\pi} \tag{3.5.5}$$

---

*tion*, Springer 1999 を参照．

鞍点の指数は $-1$，結節点，焦点の指数は1である．

閉曲面 $S$ 上に1形式 $\omega$ が与えられているとする．$\boldsymbol{\omega}$ の特異点全体を $\Sigma(\boldsymbol{\omega})$ と書く．$\Sigma(\boldsymbol{\omega})$ が有限集合ならば，定理3.5.3と同様に次が示せる．

$$\sum_{\boldsymbol{p}\in\Sigma(\boldsymbol{\omega})} \mathrm{ind}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{p}) = \chi(S)$$

**■ ブローアップによる方向場の引き戻し**　$\mathbb{R}_{\geq} = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ として，次の写像を考える．

$$\pi : \mathbb{R}_{\geq} \times S^1 \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{3.5.6}$$

$\{0\} \times S^1$ の写像 $\pi$ による像は原点である．$\delta$ を正の定数として，写像

$$\pi_\delta : \mathbb{R}_{\geq} \times S^1 \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\theta) \mapsto ((\delta + r)\cos\theta, (\delta + r)\sin\theta)$$

により $\mathbb{R}_{\geq} \times S^1$ を平面内の円盤の補集合と同一視しておく．式(3.5.6)からわかる式

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

より，$\omega$ を $dr$, $d\theta$ の式に書き換えることができる．$a(0,0) = b(0,0) = 0$ ならば，$a(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\hat{a}(r,\theta)$, $b(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\hat{b}(r,\theta)$ と書けるので，

$$\frac{a\,dx + b\,dy}{r} = (\hat{a}\cos\theta + \hat{b}\sin\theta)dr + r(\hat{b}\cos\theta - \hat{a}\sin\theta)d\theta \tag{3.5.7}$$

$(r,\theta) = (0,\theta_0)$ がこの1形式の特異点だとすると，$\theta_0$ は次を満たす．

$$\hat{a}(0,\theta_0)\cos\theta_0 + \hat{b}(0,\theta_0)\sin\theta_0 = 0$$

また，$r$ が負の部分でも式(3.5.7)は意味をもつ．式(3.5.7)の $dr$ の係数が恒等的に0[10]でなければ $r = 0$ が解曲線になるので，$r = 0$ 上で焦点はもちえない．$\Omega$ の $(r,\theta)$ 平面への持ち上げが $r = 0$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ に $s$ 個の鞍点，$t$ 個の結節点をもつとし，他の特異点はもたないとする．

---

[10] $dr$ の係数が恒等的に0ならば，$\theta =$（定数）が解曲線である．

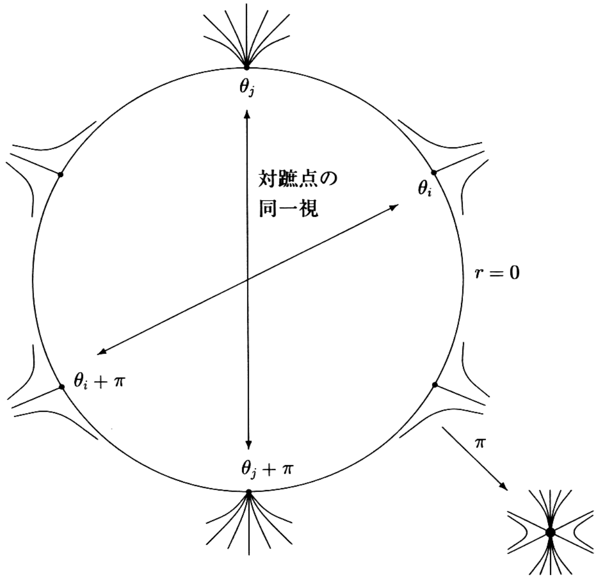
**定理 3.5.7**

$$\mathrm{ind}(\omega, (0,0)) = 1 + t - s$$

**概証** $\varepsilon$ を非常に小さな正の数とし，$\theta \mapsto (\varepsilon, \theta)$ に沿って 1 周するときの方向場の角度変化を見る．$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}\times S^1 : r \geq 0\}$ とし，点 $(0,\theta)$ と点 $(0,\theta+\pi)$ を同一視する．図で円周上の対蹠点（たいせきてん）を同一視することになる．

$r = 0$ 上に特異点がなければ，方向場は $r = 0$ の近傍で常に $r = 0$ に「平行」（または横断的）なので，$\theta \mapsto (\varepsilon, \theta)$ に沿う 1 周で方向場の角度は $2\pi$ 増える．結節点 1 つにつきさらに $2\pi$ 増える．実際，図の $\theta_j$ で $\pi$，$\theta_j + \pi$ でさらに $\pi$ 増える．鞍点が 1 つにつき $2\pi$ 減る．実際，図の $\theta_i$ で $\pi$，$\theta_i + \pi$ でさらに $\pi$ 減る．

よって，$2\pi\,\mathrm{ind} = 2\pi + 2\pi t - 2\pi s$ となる． □




### 3.5.3 2 重方向場

各点に 2 つの方向が与えられたものを **2 重方向場**という．$\mathbb{R}^2$ の開集合 $U$ 上で定義された対称 2 形式

$$a(x,y)dx^2 + 2b(x,y)dx\,dy + c(x,y)dy^2 = 0, \qquad (x,y) \in U \tag{3.5.8}$$

は $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) > 0$ なる点で 2 重方向場を与える．そのフローは

$$a(x(t),y(t))\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{dx(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dt} + c(x(t),y(t))\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 = 0$$

を満たす曲線 $(x(t),y(t))$ である．上式は $b^2 - ac < 0$ なる点では方向を定義しない．$b^2 - ac$ を**判別式**という．$(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $b^2 - ac = 0$ なる点では 1 方向を定める．$b^2 - ac = 0$ を満たす点全体を**判別集合**という．$(a,b,c) = (0,0,0)$ なる点は 2 重方向場の**特異点**という．特異点では有限個の方向は決まらない．

■ **孤立する判別集合**　原点近傍で $b^2 - ac \geq 0$ であり，原点でのみ $b^2 - ac = 0$ が成り立つ場合は，判別集合は原点で孤立している．この場合，次のようにして 2 重方向場の原点での指数を定義する．

**定義 3.5.8（特異点の指数の定義）**　原点 0 の周りを正の向きに 1 周する閉曲線 $\alpha : [0,l] \to S$ をとり，この閉曲線で囲まれる領域を $D$ とする．ここで $\alpha(t+l) = \alpha(t)$ を満たすように $\alpha$ を周期的に $\mathbb{R}$ 全体に拡張しておく．閉曲線 $\alpha$ 上，および $D$ の内点には 2 重方向場 $\Omega$ の原点以外の特異点はないとする．すると，点 $\alpha(t)$ では，$\Omega$ は 2 つの方向を定義するので，その方向と $u$ 軸方向のなす角を $\theta_{1,\alpha}(t)$, $\theta_{2,\alpha}(t)$ で表す．$\theta_{1,\alpha}(t)$, $\theta_{2,\alpha}(t)$ が $t$ に関して連続に定義されているとし，$t$ を 0 から増加させて $\theta_{1,\alpha}(t)$, $\theta_{2,\alpha}(t)$ を $\alpha$ に沿って追跡する．$t = l$ に到達するとき，次のいずれかが成立する．

$$\theta_{1,\alpha}(l) \equiv \theta_{1,\alpha}(0) \pmod{\pi} \qquad \text{または} \qquad \theta_{1,\alpha}(l) \equiv \theta_{2,\alpha}(0) \pmod{\pi}$$

前者の場合は $\theta_{2,\alpha}(l) \equiv \theta_{2,\alpha}(0) \pmod{\pi}$，後者の場合は $\theta_{2,\alpha}(l) \equiv \theta_{1,\alpha}(0) \pmod{\pi}$ となる．いずれの場合も $\theta_{1,\alpha}(2l)) - \theta_{1,\alpha}(0)$ は $\pi$ の整数倍となるので，$\Omega$ の点 $\boldsymbol{p}$ での**指数**を次で定める．

$$\operatorname{ind}(\Omega, \boldsymbol{p}) = \frac{\theta_{1,\alpha}(2\ell) - \theta_{1,\alpha}(0))}{4\pi}$$

方向場の場合と同様に写像 (3.5.6) により，式 (3.5.8) を $dr$, $d\theta$ の式に書き換えることができる．$\Omega$ の $(r,\theta)$ 平面への持ち上げが $r = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ に $s$

個の鞍点，$t$ 個の結節点をもつとし，他の特異点はもたないとする．

**定理 3.5.9**

$$\mathrm{ind}(\Omega,(0,0)) = 1 + \frac{t-s}{2}$$

**証明** 定理 3.5.7 と同様である．各点で方向場が 2 つ決まることが違いである．$r\theta$ 平面で考える．$r = 0$ 上に特異点がなければ，$\theta \mapsto (\varepsilon, \theta)$ に沿って 1 周すると，それぞれの方向場の角度は $2\pi$ 増える．2 つの方向場の 1 周の増分の和を考えると，結節点があるとさらに $2\pi$ 増え，鞍点が 1 つあると $2\pi$ 減る．よって，$2 \times 2\pi\,\mathrm{ind} = 2 \times 2\pi + 2\pi t - 2\pi s$ となる． □

■ **非特異な判別集合** 次に，判別集合が非特異な場合を考える．必要ならば適当に回転させて，フローの接ベクトル（の極限）が $y$ 軸に平行にならないと仮定してよい．$xyp$ 空間内の曲面 $g(x,y,p) = 0$ 上で，1 形式 $\omega = p\,dx - dy$ の定める方程式 $\omega = 0$ の解曲線を考えよう．解曲線上では $p = \frac{dy}{dx}$ なので，解曲線を $xy$ 平面に射影すれば微分方程式 $g(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ の解曲線を考えていることになる．2 元 2 次微分方程式

$$a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2 = 0 \tag{3.5.9}$$

に対し $g = a + 2bp + cp^2$, $\omega = p\,dx - dy$ とおくと，式 (3.5.9) の解曲線は，曲面 $g = 0$ 上の方程式 $\omega = 0$ の解曲線に持ち上がる．

**例 3.5.10** $g = p^2 + x$ のとき，曲面 $g = 0$ は非特異である．曲面 $g = 0$ 上 $2p\,dp + dx = 0$ なので $\omega = p\,dx - dy = -2p^2 dp - dy$ となる．曲面上に $\omega = 0$ の特異点はなく，このフローを $xy$ 平面に射影すると，判別式 $-x$ が正の領域に射影され，判別集合 $x = 0$ とフローは横断的にぶつかる．この点を**折畳正則点**という．

**例 3.5.11** $g = p^2 + \lambda x^2/2 + y$ のとき，曲面 $g = 0$ は非特異である．曲面上 $2p\,dp + \lambda x\,dx + dy = dg = 0$ なので

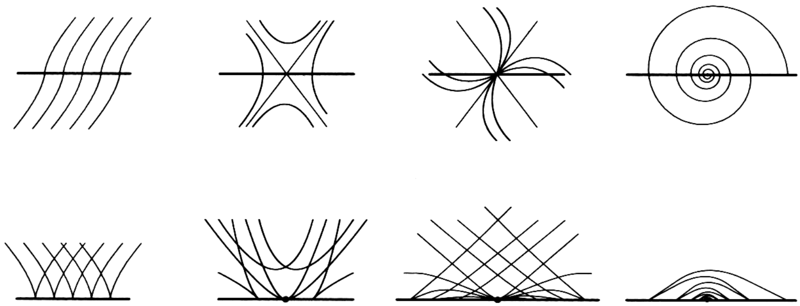
$$\omega = p\,dx - dy = (\lambda x + p)dx + 2p\,dp$$

となり，$(0,0,0)$ が $\omega = 0$ の特異点であることがわかる．$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値 $t$ は

$$t(t-1)+2\lambda=(t-\tfrac{1}{2})^2+2\lambda-\tfrac{1}{4}=0$$

を満たすので，$\lambda<0$ のとき鞍点，$0<\lambda<1/8$ のとき結節点，$1/8<\lambda$ のとき焦点である．このフローを $xy$ 平面に射影すると，判別式 $-(y+\lambda x^2/2)$ が正の領域に射影される．$\lambda<0$ のとき**折畳鞍点**，$0<\lambda<1/8$ のとき**折畳結節点**，$1/8<\lambda$ のとき**折畳焦点** という．

次図の上段に曲面 $g=0$ 上の $\omega=0$ のフローと，下段にそれを $xy$ 平面に射影したものを示す．



折畳正則点　　折畳鞍点　　折畳結節点　　折畳焦点

判別集合が非特異で，1 形式 $\omega$ の特異点が全て孤立しているとし，その特異点 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の $U$ への像を $\boldsymbol{p}$ と書く．点 $\boldsymbol{p}$ での $\Omega$ の指数を次で定める．

$$\operatorname{ind}(\Omega,\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}\operatorname{ind}(\omega,\tilde{\boldsymbol{p}})$$

曲面 $\widetilde{S}_U$ 上の $\omega$ が定める方向場のフローを射影 $\widetilde{S}_U\to U$ で写せば，方程式 (3.5.8) のフローが得られ，方程式 (3.5.8) のフローは曲面 $\widetilde{S}_U$ 上の $\omega$ のフローに持ち上げることができる．

閉曲面 $S$ 上に 2 重方向場 $\Omega$ があるとし，判別集合は非特異とする．$S$ を有限個の開集合 $U_i$ で覆い，$\widetilde{S}_{U_i}$ を貼り合わせて $\widetilde{S}$ を構成する．$\widetilde{S}$ 上の 1 形式 $\omega$ が $\Omega$ の持ち上げだとして，その特異点集合 $\Sigma(\omega)$ が有限集合とする．$\Sigma(\omega)$ の $S$ への像を $\Sigma(\Omega)$ と書くとき，次が成り立つ．

$$\chi(S)=\frac{1}{2}\chi(\widetilde{S})=\frac{1}{2}\sum_{\tilde{\boldsymbol{p}}\in\Sigma(\omega)}\operatorname{ind}(\omega,\tilde{\boldsymbol{p}})=\sum_{\boldsymbol{p}\in\Sigma(\Omega)}\operatorname{ind}(\Omega,\boldsymbol{p})$$

### 3.5 節の演習

**演習 3.5.1**　式 (3.5.5) で与えた方向場の指数は，うまく定義されていることを示せ．

**演習 3.5.2**　式 (3.5.4) を写像 (3.5.6) で引き戻して現れる鞍点と結節点の個数を決定せよ．

**演習 3.5.3**　$a_{01} \neq b_{10}$, $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0$ と仮定する．座標変換 $x = p_1 u + p_2 v$, $y = q_1 u + q_2 v$ $(p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0)$ で

$$
\begin{aligned}
&(a_{10}x + a_{01}y + o(2))dx + (b_{10}x + b_{01}y + o(2))dy \\
&\quad = (\alpha_{10}u + \alpha_{01}v + o(2))du(\beta_{10}u + \beta_{01}v + o(2))dv
\end{aligned}
$$

と書けたとする．このとき $\alpha_{01} - \beta_{10}$, $\alpha_{10}\beta_{01} - \alpha_{01}\beta_{10}$ を $a_{10}$, $a_{01}$, $b_{10}$, $b_{01}$ で表せ．

**演習 3.5.4**　$k$ を 2 以上の整数，$a \neq b'$, $ab' - a'b \neq 0$ とするとき，微分方程式

$$(ax + a'y + o(k-1))dx + (bx + b'y + o(k-1))dy = 0$$

は，座標変換 $x = u + P$, $y = u + Q$ によって方程式

$$(au + a'v + o(k))du + (bu + b'v + o(k))dv = 0$$

に還元するかどうかを調べたい．$\sigma = a' - b$, $\delta = ab' - a'b$ として，次を示せ．

- $k = 2$ のとき $2\sigma^2 \neq 9\delta$ ならば正しい．
- $k = 3$ のとき $3\sigma^2 \neq 16\delta$ ならば正しい．
- $k = 4$ のとき $4\sigma^2 \neq 25\delta$, $2\sigma^2 + \delta \neq 0$ ならば正しい．

**演習 3.5.5**　曲面 $S$ 上の 2 重方向場がある点 $\boldsymbol{p}$ で横断的ならば原点 $(0,0)$ 中心の近傍 $U$ と $\boldsymbol{x}(0,0) = \boldsymbol{p}$ なる径数付け $\boldsymbol{x} : U \to S$ が存在して，$\{u = 定数\}$, $\{v = 定数\}$ の像が方向場のフロー（の一部）となるようにできる．

## 3.6　曲率線と漸近線の特異点

### 3.6.1　曲率線の特異点

ダルブー (Darboux) による曲率線の特異点の分類（臍点の分類）を紹介しよう．

**定理 3.6.1**　曲率線は臍点で特異点をもち，そこでの特異点型は

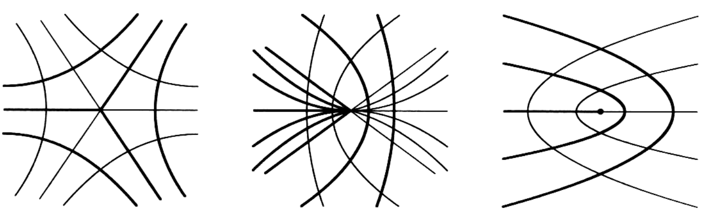
- $\delta < 0$, $\sigma < 0$ のときは星(スター)
- $\delta < 0$, $\sigma > 0$ のとき檬星(モンスター)
- $\delta > 0$ のとき檸檬(レモン)

となる．ただし，$a_{30} = \boldsymbol{v}_1\kappa_1(0,0)$, $a_{21} = \boldsymbol{v}_2\kappa_1(0,0)$, $a_{12} = \boldsymbol{v}_1\kappa_2(0,0)$, $a_{03} = \boldsymbol{v}_2\kappa_2(0,0)$ とおいて，$\sigma$, $\delta$ を次で定めている．

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{30} - a_{12} \\ a_{12} & a_{21} - a_{03} \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{21} & \frac{1}{3}(2a_{12} - a_{30}) & \frac{1}{3}(2a_{21} - a_{03}) & 0 \\ \frac{1}{3}(2a_{12} - a_{30}) & \frac{1}{3}(2a_{21} - a_{03}) & -a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & \frac{1}{3}(2a_{12} - a_{30}) & \frac{1}{3}(2a_{21} - a_{03}) \\ 0 & \frac{1}{3}(2a_{12} - a_{30}) & \frac{1}{3}(2a_{21} - a_{03}) & -a_{12} \end{vmatrix}$$

ここで，星，檬星，檸檬はそれぞれ図のような形状をしている特異点である．



星(スター) ind $= -\frac{1}{2}$　　檬星(モンスター) ind $= \frac{1}{2}$　　檸檬(レモン) ind $= \frac{1}{2}$

**証明**　モンジュ標準形で考えれば，主方向の方程式は次式で表せる．

$$\begin{vmatrix} 1+o(1) & k_1+a_{30}u+a_{21}v+o(1) & dv^2 \\ o(1) & a_{21}u+a_{12}v+o(1) & -du\,dv \\ 1+o(1) & k_2+a_{12}u+a_{03}v+o(1) & du^2 \end{vmatrix} = 0$$

第 1 行を第 3 行から引くと,

$$\begin{vmatrix} 1+o(1) & k_1+a_{30}u+a_{21}v+o(1) & dv^2 \\ o(1) & a_{21}u+a_{12}v+o(1) & -du\,dv \\ o(1) & k_2-k_1+(a_{12}-a_{30})u+(a_{03}-a_{21})v+o(1) & du^2-dv^2 \end{vmatrix} = 0$$

を得るので, 臍点 ($k_1 = k_2$ のとき) がこの方程式の特異点である. 臍点のとき, $\widehat{A}(u,v) = a_{21}u + a_{12}v$, $\widehat{B}(u,v) = \frac{1}{2}[(a_{12}-a_{30})u + (a_{03}-a_{21})v]$ とおくと, 主方向の方程式は次のようになる.

$$[\widehat{A}(u,v)+o(1)]du^2 + 2[\widehat{B}(u,v)+o(1)]du\,dv - [\widehat{A}(u,v)+o(1)]dv^2 = 0 \tag{3.6.1}$$

この式で $u = \varepsilon\cos\theta$, $v = \varepsilon\sin\theta$, $du = \cos\phi$, $dv = \sin\phi$ とおくと,

$$[\widehat{A}(\cos\theta,\sin\theta)+O(\varepsilon)]\cos 2\phi + [\widehat{B}(\cos\theta,\sin\theta)+O(\varepsilon)]\sin 2\phi = 0$$

なので, 次式を得る.

$$[\cos 2\phi : \sin 2\phi] = [\widehat{B}(\cos\theta,\sin\theta)+O(\varepsilon) : -\widehat{A}(\cos\theta,\sin\theta)+O(\varepsilon)]$$

この式は, 原点の周りの小円 $\gamma : \theta \mapsto (u,v) = \varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)$ に沿って方向 $(du,dv) = (\cos\phi,\sin\phi)$ の変化を説明している. 小円 $\gamma$ を 1 周する線形写像 $(u,v) \mapsto (\widehat{B}(u,v), -\widehat{A}(u,v))$ による像は, $\sigma > 0$ のとき原点の周りを正の向きに 1 周し, $\sigma < 0$ のとき原点の周りを負の向きに 1 周する. よって小円 $\gamma$ を 2 周すると, $(du,dv)$ は正または負の向きに 1 周するので, 主方向を 2 重方向場と見たときの指数は, $\sigma > 0$ のときは $1/2$, $\sigma < 0$ のときは $-1/2$ である.

式 (3.6.1) で $(u,v)$ を $(x,y)$ に置き換えて, この方程式を $A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 = 0$ と書く. 補題 3.5.6 と同様の議論により, 原点に到達するフローの極限方向 $x\partial_x + y\partial_y$ は, 存在すれば次の特性方程式の解になる.

$$a_{21}x^3 + (2a_{12} - a_{30})x^2y + (a_{03} - 2a_{21})xy^2 - a_{12}y^3 = 0$$

$\delta$ はこの判別式である．

次に，$x = u,\ y = uv$ とおいて式 (3.6.1) を書き換えてみる．

$$\begin{aligned} &A\,dx^2 + 2\,B\,dx\,dy + C\,dy^2 \\ &\quad = A\,du^2 + 2\,B\,du(u\,dv + v\,du) + C(u\,dv + v\,du)^2 \\ &\quad = (A + 2Bv + Cv^2)du^2 + 2u(B + Cv)\,du\,dv + u^2C\,dv^2 \end{aligned}$$

となるが，$A,\ B,\ C$ はそれぞれ $u$ で割り切れるので，$A = u\bar{A},\ B = u\bar{B},\ C = u\bar{C}$ とおけば，因子 $u$ を約して次の方程式を得る．

$$(\bar{A} + 2\bar{B}v + \bar{C}v^2)du^2 + 2u(\bar{B} + \bar{C}v)\,du\,dv + u^2\bar{C}\,dv^2 = 0$$

$\bar{A}_1 = \bar{A} + 2\bar{B}v + \bar{C}v^2,\ \bar{B}_1 = \bar{B} + \bar{C}v,\ \bar{C}_1 = \bar{C}$ とおく．$(u\bar{B}_1)^2 - \bar{A}_1(u^2\bar{C}_1) = u^2(\bar{B} + \bar{C}v)^2 - (\bar{A} + 2\bar{B}v + \bar{C}v^2)u^2\bar{C} = u^2(\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C})$ で $(\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C})_{u=0} = \widehat{A}(1,v)^2 + \widehat{B}(1,v)^2$ なので，因数分解でき，

$$\begin{aligned} &\bar{A}_1du^2 + 2u\bar{B}_1\,du\,dv + u^2\bar{C}\,dv^2 \\ &= \frac{1}{\bar{A}_1}(\bar{A}_1du + (u\bar{B}_1 - u\sqrt{\bar{B}_1^2 - \bar{A}_1\bar{C}_1})dv)(\bar{A}_1du + (u\bar{B}_1 + u\sqrt{\bar{B}_1^2 - \bar{A}_1\bar{C}_1})dv) \end{aligned}$$

を得る．$\bar{B}_1|_{u=0} = \widehat{B}(1,v)$ と $(\bar{A}_1\bar{C}_1)|_{u=0} = -\widehat{A}(1,v)^2$ が共通根をもたないことに注意しよう．

さて，特異点を解析しよう．

$$\bar{B}_1 = \bar{B} + \bar{C}v, \qquad \bar{A}_1\bar{C}_1 = (\bar{A} + 2\bar{B}v + \bar{C}v^2)\bar{C}$$

より，$\bar{B}$ と $\bar{C}$ が $u = 0$ 上，共通根をもたず，$\bar{A} + v\bar{B}$ と $\bar{B} + v\bar{C}$ が $u = 0$ 上，共通根をもたない．

まず $\bar{B}_1|_{u=0}$ が 0 でない点での特異点を見よう．$\bar{A}_1|_{u=0}$ は単根のみをもつのであった．$K = \sum_{i=1}^{\infty}\binom{1/2}{i}\frac{\bar{A}_1^{i-1}\bar{C}_1^i}{\bar{B}_1^{2i}}$ とおくと，

$$\sqrt{\bar{B}_1^2-\bar{A}_1\bar{C}_1}=|\bar{B}_1|\left(1-\frac{\bar{A}_1\bar{C}_1}{\bar{B}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=|\bar{B}_1|\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{1/2}{i}\frac{\bar{A}_1^i\bar{C}_1^i}{\bar{B}_1^{2i}}\right)=|\bar{B}_1|(1+\bar{A}_1K)$$

なので

$$\bar{A}_1du+\left(u\bar{B}_1\pm u\sqrt{\bar{B}_1^2-\bar{A}_1\bar{C}_1}\right)dv$$
$$=\bar{A}_1du+u(\bar{B}_1\pm|\bar{B}_1|(1+\bar{A}_1K))dv$$
$$=\begin{cases}\bar{A}_1du+u\bar{B}_1(2+\bar{A}_1K))dv & (\pm\bar{B}_1>0),\\ \bar{A}_1[du-u\bar{B}_1Kdv] & (\pm\bar{B}_1<0)\end{cases}$$

となる．下段は [ ] の中が特異点をもたず，特異点は上段の場合のみであり，それは $\bar{A}_1=u=0$ で定まる．つまり，特異点 $(0,v_0)$ は

$$\bar{A}_1|_{u=0}=\widehat{A}(1,v_0)+2\widehat{B}(1,v_0)v_0-\widehat{A}(1,v_0)v_0^2=0$$

を満たす．すなわち，特異点は，$\delta>0$ のとき 1 個，$\delta<0$ のとき 3 個であり，さらに，$\pm(\bar{A}_1)_v(0,v_0)>0$ ならば結節点，$\pm(\bar{A}_1)_v(0,v_0)<0$ ならば鞍点であることもわかる．$\delta\neq 0$ なので $(\bar{A}_1)_{u=0}$ は重解をもたず，特異点は結節点か鞍点である．

結節点が $t$ 個，鞍点が $s$ 個とすると，$\mathrm{ind}=1+\frac{t-s}{2}$ なので $\delta>0$ ならば $s+t=1$ で $1+\frac{t-s}{2}=\mathrm{ind}=\pm1/2$ より可能な解は $(s,t)=(1,0)$ で檸檬である．$\delta<0$ ならば $s+t=3$ で $1+\frac{t-s}{2}=\mathrm{ind}=\pm1/2$ より $(s,t)=(3,0),(2,1)$ で，前者が星，後者が檬星である．

$\bar{B}_1|_{u=0}$ の零点では，$\bar{A}_1\bar{C}_1|_{u=0}=-\widehat{A}(0,v)^2$ が負であるので，

$$\sqrt{\bar{B}_1^2-\bar{A}_1\bar{C}_1}=\sqrt{-\bar{A}_1\bar{C}_1}\left(1-\frac{\bar{B}_1^2}{\bar{A}_1\bar{C}_1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-\bar{A}_1\bar{C}_1}(1+\bar{B}_1^2L)$$

$\left(\text{ただし } L=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{B}_i^{2(i-1)}}{\bar{A}_1^i\bar{C}_1^i}\right)$ と書けるので，

$$\bar{A}_1 du + \left(u\bar{B}_1 \pm u\sqrt{\bar{B}_1^2 - \bar{A}_1\bar{C}_1}\right)dv$$
$$= \bar{A}_1 du + u\left(\bar{B}_1 \pm \sqrt{-\bar{A}_1\bar{C}_1}(1+\bar{B}_1^2 L)\right)dv$$

となり，$\bar{A}_1 \neq 0$ なので，正則点である．

$x = u'v'$, $y = v'$ とおいても同様の計算が可能である． □

### 3.6.2　漸近線の特異点

漸近線の特異点の分類を紹介しよう．$\boldsymbol{v}_2\kappa_1 = 0$ なる点を $\boldsymbol{v}_2$ 方向の劣放物点（$\boldsymbol{v}_2$ 劣放物点）というのであった．

**定理 3.6.2**　漸近線は放物点軌跡で特異点をもつ．$k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ とするとき，

- $\boldsymbol{v}_1$ 峰点でなければ，すなわち $\boldsymbol{v}_1\kappa_1 \neq 0$ ならば折畳通常点．
- $\boldsymbol{v}_1$ 峰点で $\boldsymbol{v}_2$ 劣放物的でなければ $(\boldsymbol{v}_1\kappa_1(0,0) = 0,\ \boldsymbol{v}_2\kappa_1(0,0) \neq 0)$,
  - $\kappa_2(\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1)|_{(0,0)} < 0$ ならば折畳鞍点．
  - $0 < \kappa_2(\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1)|_{(0,0)} < \frac{1}{8}(\boldsymbol{v}_2\kappa_1)^2|_{(0,0)}$ ならば折畳結節点．
  - $\frac{1}{8}(\boldsymbol{v}_2\kappa_1)^2|_{(0,0)} < \kappa_2(\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1)|_{(0,0)}$ ならば折畳焦点．

**証明**　モンジュ標準形

$$g(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(k_1u^2 + k_2v^2) + \sum_{i+j\geq 3}\frac{a_{ij}}{i!j!}u^iv^j\right)$$

で表された曲面の単位法ベクトルは

$$\Big(-k_1u - \frac{a_{30}}{2}u^2 - a_{21}uv - \frac{a_{12}}{2}v^2 + \cdots,$$
$$-k_2v - \frac{a_{21}}{2}u^2 - a_{12}uv - \frac{a_{03}}{2}v^2 + \cdots, 1 - \frac{1}{2}(k_1^2u^2 + k_2^2v^2) + \cdots\Big)$$

と展開され．第 2 基本形式は次のように表示される．

$$\mathrm{II} = \left(k_1 + a_{30}u + a_{21}v + \frac{a_{40} - k_1^3}{2}u^2 + a_{31}uv + \frac{a_{22} - k_1k_2^2}{2}v^2 + \cdots\right)du^2$$
$$+ 2\left(a_{21}u + a_{12}v + \frac{a_{31}}{2}u^2 + a_{22}uv + \frac{a_{13}}{2}v^2 + \cdots\right)du\,dv$$
$$+ \left(k_2 + a_{12}u + a_{03}v + \frac{a_{22} - k_1^2k_2}{2}u^2 + a_{13}uv + \frac{a_{04} - k_2^3}{2}v^2 + \cdots\right)dv^2$$

したがって，$k_1=0,\, k_2\neq 0$ のとき，原点は判別集合の非特異点である．

原点が $\boldsymbol{v}_1$ に対応する峰点でなければ $(a_{30}\neq 0)$，任意の正の整数 $k$ に対し，次式に還元されることを見る．

$$(x+o(k))\,dx^2+o(k)dx\,dy+(1+o(k))dy^2$$

簡単のため $k_2>0$ を仮定する．（$k_2<0$ のときは $z$ 軸の符号を変え，したがって $k_i$ や $a_{ij}$ の符号を変えて計算すれば同様なので略す．）

$u=(1/a_{30})^{1/3}x-\frac{a_{21}}{a_{30}\sqrt{k_2}}y,\ v=y/\sqrt{k_2}$ とおくと，

$$\begin{aligned}&[a_{30}u+a_{21}v]du^2\\&\quad=\left[a_{30}(1/a_{30})^{1/3}x-\tfrac{a_{21}}{\sqrt{k_2}}y+a_{21}\tfrac{y}{\sqrt{k_2}}\right]\left[(1/a_{30})^{1/3}dx-\tfrac{a_{21}}{a_{30}\sqrt{k_2}}dy\right]^2\\&\quad=x\,dx^2+(1/a_{30})^{1/3}x\left[-2(1/a_{30})^{1/3}\tfrac{a_{21}}{a_{30}\sqrt{k_2}}dx\,dy+\tfrac{a_{21}^2}{a_{30}^2k_2}dy^2\right]\end{aligned}$$

なので，$B,C$ を $x,y$ の 1 次同次多項式として，

$$(x+o(1))dx^2+2(B+o(1))\,dx\,dy+(1+C+o(1))dy^2=0$$

なる方程式を得る．$u,v$ の 1 次同次多項式 $F$ と 2 次同次多項式 $Q$ をとり，$x=u,\ y=v+Q$ とおく．$F,Q$ をうまく定めれば，

$$\begin{aligned}&(1+F)[(x+o(1))dx^2+2(B+o(1))\,dx\,dy+(1+C+o(1))dy^2]\\&\quad=(u+o(1))du^2+o(1)\,du\,dv+(1+o(1))dv^2\end{aligned}$$

となることを示す．まず，次に注意する．

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(1+F)[u\,du^2+2(B+o(1))du(Q_udu+(1+Q_v)dv)\\&\qquad+(1+C+o(1))(Q_udu+(1+Q_v)dv)^2]\\&=(1+F)[(u+o(1))du^2+2(B+Q_u+o(1))du\,dv\\&\qquad+(1+C+2Q_v+o(1))dv^2]\\&=(u+o(1))du^2+2(B+Q_u+o(1))du\,dv\\&\qquad+(1+C+2Q_v+F+o(1))dv^2\end{aligned}\tag{3.6.2}$$

なので，$B+Q_u=0$ となるように $Q$ を選び，$C+Q_v+F=0$ となるように $F$ を選べばよい．後は演習 3.6.1 を使えばよい．

峰点 $(a_{30}=0)$ のときは，$\boldsymbol{v}_2$ に関し劣放物的でなければ $(a_{21}\neq 0)$，任意の正の整数 $k$ に対し，次式に還元されることを見る．

$$\left(y+\frac{\lambda}{2}x^2+o(k)\right)dx^2+o(k)dx\,dy+(1+o(k))dy^2=0,\ \lambda=\frac{a_{40}k_2}{{a_{21}}^2}-3$$

簡単のため $k_2>0$ を仮定する．$u=\frac{k_2^{1/4}}{|a_{21}|^{1/2}}x,\ v=\frac{y}{\sqrt{k_2}}$ とおくと，$B, C$ を $(x,y)$ の 1 次同次式として，次の方程式になる．

$$(\pm y+o(1))dx^2+2(B+o(1))\,dx\,dy+(1+C+o(1))dy^2=0$$

$B=\pm u+*v$, $x^2\,dx^2$ の係数は $\frac{a_{40}k_2}{2a_{21}^2}$ になる．$u,v$ の 1 次同次多項式 $F$ と 2 次同次多項式 $Q$ をとり，$x=u,\ y=v+Q$ とおく．式 (3.6.2) で $u\,du^2$ を $v\,du^2$ に変えても他の項は変わらないので，$B+Q_u=0$ となるように $Q$ を定め，$C+Q_v+F=0$ となるように $F$ を定めれば，

$$\begin{aligned}&(1+F)\left[\left(\pm y+\frac{\lambda}{2}x^2+o(1)\right)dx^2+2(B+o(1))\,dx\,dy+(1+C+o(1))dy^2\right]\\&\quad=(\pm v+o(1))du^2+o(1)\,du\,dv+(1+o(1))dv^2\end{aligned}$$

となることがわかる．次に注意する．

$$\lambda=\frac{a_{40}k_2}{{a_{21}}^2}-3=\frac{k_2}{{a_{21}}^2}\left(a_{40}-\frac{3{a_{21}}^2}{k_2}\right)=\frac{\kappa_2(0,0)\boldsymbol{v}_1^2\kappa_1(0,0)}{(\boldsymbol{v}_2\kappa_1(0,0))^2}$$

$u^2\,du$ の係数は $\lambda/2$ である．$v$ を $\pm v$ に変えれば $v\,du^2$ の係数は 1 になる．演習 3.6.2 より，方程式 (3.6.3) に還元できる．後は例 3.5.10, 3.5.11 での計算を追えばよい．　□

## 3.6 節の演習

**演習 3.6.1**　微分方程式

$$(x+o(1))dx^2+o(1)\,dx\,dy+(1+o(1))dy^2=0$$

は，正整数 $k$ に対し，適当に座標を変えることにより，

$$(x + o(k))dx^2 + o(k)\,dx\,dy + (1 + o(k))dy^2 = 0$$

となることを示せ.

**演習 3.6.2** $x^2dx^2$ の係数が $\lambda/2$ であるような微分方程式

$$(y + o(1))dx^2 + o(1)\,dx\,dy + (1 + o(1))dy^2 = 0$$

は, 任意の 2 以上の整数 $k$ に対し, 適当に座標を変えることにより,

$$(y + \tfrac{\lambda}{2}x^2 + o(k))dx^2 + o(k)\,dx\,dy + (1 + o(k))dy^2 = 0 \tag{3.6.3}$$

となることを示せ.

**演習 3.6.3** $\mathbb{R}^3$ の閉曲面 $S$ の放物点軌跡が非特異で, 漸近線が折畳鞍点, 折畳焦点, 折畳結節点以外の特異点をもたないとする. このとき, 閉曲面の双曲領域 $S_-$ のオイラー数を 2 倍したものは, 折畳焦点と折畳結節点の個数の和から折畳鞍点の個数を引いたものに等しい.

## 3.7 等温座標の存在について

等温座標系は $\partial_u$, $\partial_v$ が直交し, その長さが等しい座標系である. その存在を仮定して議論することは多く, 曲面論の基礎となる事実といえる. 本節では, バナッハ空間などの定義を仮定し, 等温座標存在の証明を与えよう.

### 3.7.1 等温座標の存在定理

$0 < \alpha \leq 1$ なる定数 $\alpha$ をとる. 半径 $R$ の閉円盤 $\overline{D}$ 上の関数 $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ が $\alpha$ 次の**ヘルダー連続**であるとは, 次を満たす定数 $L$ が存在するときをいう.

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|^\alpha \qquad (z_1, z_2 \in \overline{D})$$

$\overline{D}$ 上の $\alpha$ 次のヘルダー連続な関数全体を $C^{0,\alpha}(D)$ で表す. $C^n$ 級の関数で $\alpha$ 次のヘルダー連続な関数全体を $C^{n,\alpha}$ で表す. $C^1(\overline{D}) \subset C^{0,1}(D)$ が成り立ち, $0 < \beta < \alpha \leq 1$ ならば $C^{0,\alpha}(D) \subset C^{0,\beta}(D)$ である.

本節の目標は, 次の定理を証明することである.

**定理 3.7.1（等温座標の存在定理）** $n = 1, 2, \cdots$ とする．正の数 $R$ を十分小さくとれば，$EG - F^2 > 0$ を満たす $C^{n,\alpha}$ 級関数 $E$, $F$, $G$ に対し，$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ なる $C^{n+1,\alpha}$ 級の座標変換で次を満たすものが存在する．

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2 = \lambda(du^2 + dv^2) \qquad (\lambda \text{ は正値関数}) \tag{3.7.1}$$

### 3.7.2　複素関数論から

$z = x + \sqrt{-1}y$ とおけば $\bar{z} = x - \sqrt{-1}y$ なので，$dz = dx + \sqrt{-1}dy$, $d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$ である．$dx = (dz + d\bar{z})/2$, $dy = (dz - d\bar{z})/(2\sqrt{-1})$ なので，

$$\begin{aligned} &E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2 \\ &\quad = \frac{E + G - 2\sqrt{-1}F}{4}dz^2 + \frac{E+G}{2}dz\,d\bar{z} + \frac{E + G + 2\sqrt{-1}F}{4}d\bar{z}^2 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

を得る．$x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2\sqrt{-1}$ より，$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - \sqrt{-1}\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + \sqrt{-1}\partial_y)$ となる．$u$, $v$ を $(x,y)$ の実数値関数として，$w = u + \sqrt{-1}v$ とおけば，

$$\begin{aligned} w_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - \sqrt{-1}\partial_y)(u + \sqrt{-1}v) = \frac{u_x + v_y}{2} + \sqrt{-1}\frac{v_x - u_y}{2} \\ w_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + \sqrt{-1}\partial_y)(u + \sqrt{-1}v) = \frac{u_x - v_y}{2} + \sqrt{-1}\frac{u_y + v_x}{2} \end{aligned}$$

を得る．コーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ は $w_{\bar{z}} = 0$ と表せる．

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_z & \bar{w}_z \\ w_{\bar{z}} & \bar{w}_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{-1}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{-1}}{2} \end{pmatrix}$$

より，$J := u_x v_y - v_x u_y = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2$ である．$dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$, $d\bar{w} = \bar{w}_z dz + \bar{w}_{\bar{z}} d\bar{z}$ に注意する．$w = u + \sqrt{-1}v$ が等温座標ならば，

$$\lambda(du^2 + dv^2) = \lambda dw\,d\bar{w} = \lambda[w_z\overline{w}_z dz^2 + (w_z\overline{w}_{\bar{z}} + w_{\bar{z}}\overline{w}_z)dz\,d\bar{z} + \overline{w}_{\bar{z}} w_{\bar{z}} d\bar{z}^2]$$

式 (3.7.2) を比較して，等温座標 $w$ は次の方程式の解であることがわかる．

$$\lambda w_z \overline{w}_z = \frac{E - G - 2\sqrt{-1}F}{4}, \qquad \lambda(w_z \overline{w}_{\bar z} + w_{\bar z}\overline{w}_z) = \frac{E+G}{2}$$

$$\lambda \overline{w}_{\bar z} w_{\bar z} = \frac{E - G + 2\sqrt{-1}F}{4}$$

**補題 3.7.2** 次の方程式の非自明な解 $w$（恒等的には 0 でない解）は等温座標である．

$$w_{\bar z} = \mu w_z \qquad \left( ただし\ \mu = \frac{E - G + 2\sqrt{-1}F}{E + G + 2A},\ A = \sqrt{EG - F^2} \right)$$

**証明** $A > 0$ ならば $|\mu| < 1$ がわかる．実際

$$|\mu|^2 = \frac{(E-G)^2 + 4F^2}{(E+G+2A)^2} = \frac{(E+G)^2 - 4A^2}{(E+G+2A)^2} = \frac{E+G-2A}{E+G+2A} < 1$$

$w_{\bar z} = \mu w_z$ ならば，$J = |w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2 = |w_z|^2(1 - |\mu|^2) > 0$．$\lambda |w_z|^2 = \frac{E+G+2A}{4}$ で $\lambda$ を定めると，

$$\lambda \overline{w}_{\bar z} w_{\bar z} = \lambda |w_z|^2 \frac{E - G + 2\sqrt{-1}F}{E+G+2A} = \frac{E - G + 2\sqrt{-1}F}{4}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(w_z \overline{w}_{\bar z} + w_{\bar z}\overline{w}_z) &= \lambda |w_z|^2 (1 + |\mu|^2) \\
&= \frac{E+G+2A}{4} \frac{(E+G+2A) + (E+G-2A)}{E+G+2A} \\
&= \frac{E+G}{2}
\end{aligned}$$

となり，補題は証明された． □

方程式 $w_{\bar z} = \mu w_z$ を**ベルトラミの方程式** (Beltrami equation) という．

本節の目標はベルトラミ方程式の非自明解の存在の証明であるが，まずは証明に必要な複素関数論の知識を復習する．

**定理 3.7.3（一般化されたコーシーの積分定理）** 領域 $\Omega$ の閉包 $\overline{\Omega}$ がコンパクトで，$\Omega$ 上の複素数値 $C^1$ 関数が境界に連続関数として拡張するとき，

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 2\sqrt{-1} \iint_{\Omega} f_{\bar z} dx\, dy$$

**証明** $f = u + \sqrt{-1}v$ と書くと，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}(u+\sqrt{-1}v)(dx+\sqrt{-1}dy)\\
&=\int_{\partial\Omega}(u\,dx-v\,dy)+\sqrt{-1}\int_{\partial\Omega}(u\,dy+v\,dx)\\
&=\iint_{\Omega}(-u_y-v_x)dx\,dy+\sqrt{-1}\iint_{D}(u_x-v_y)dx\,dy \quad \text{（グリーンの定理）}\\
&=2\sqrt{-1}\iint_{\Omega}(\partial_x+\sqrt{-1}\partial_y)(u+\sqrt{-1}v)dx\,dy\\
&=2\sqrt{-1}\iint_{\Omega}f_{\bar z}dx\,dy
\end{aligned}$$

□

**定理 3.7.4（一般化されたコーシーの積分公式）** 領域 $\Omega$ の閉包 $\overline{\Omega}$ がコンパクトで，$\Omega$ 上の $C^1$ 関数が境界に連続関数として拡張するとき，$\zeta\in\Omega$ に対して

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz-\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{f_{\bar z}(z)}{z-\zeta}dx\,dy$$

**証明**　点 $\zeta$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の円盤を $D(\varepsilon)$ とする．$\varepsilon$ を十分小さい正の数とする．$\Omega\setminus D(\varepsilon)$ で $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ に一般化されたコーシーの積分定理を適用すると，

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{-1}\iint_{\Omega\setminus D(\varepsilon)}\frac{f_{\bar z}(z)}{z-\zeta}dx\,dy\\
&=\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-\zeta}dx\,dy-\int_{\partial D(\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-\zeta}dx\,dy\\
&=\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-\zeta}dx\,dy-\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta+\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta})}{\varepsilon e^{\sqrt{-1}\theta}}\varepsilon\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}d\theta\\
&\to\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-\zeta}dx\,dy-2\pi\sqrt{-1}f(\zeta)\qquad(\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$

□

**系 3.7.5**　$D$ を原点中心の半径 $R$ の開円盤，$\zeta\in D$ とするとき，

$$\bar\zeta=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{dx\,dy}{z-\zeta}$$

**証明**　前定理で $f(z)=\bar z$ とすると，次を得る．

$$\bar\zeta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial D}\frac{\bar z}{z-\zeta}dz-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{dx\,dy}{z-\zeta}$$

$\int_{\partial D}\frac{\bar z}{z-\zeta}dz=\int_{\partial D}\frac{R^2}{(z-\zeta)z}dz=0$ より主張を得る．　□

**補題 3.7.6** $z=\zeta+re^{\sqrt{-1}\theta}$, $D$ を有界領域, $r_{\max}=\max\{|z-\zeta| : z\in\partial D\}$, $r_{\min}=\min\{|z-\zeta| : z\in\partial D\}$, $\alpha\neq 0$ のとき,

$$\iint_D \frac{r^\alpha}{r^2}dx\,dy \leq \begin{cases} 2\pi(r_{\max})^\alpha/\alpha & (\alpha>0), \\ 2\pi(r_{\min})^\alpha/|\alpha| & (\alpha<0, \zeta\notin D) \end{cases}$$

**証明** $D=\{\varphi_0(\theta)\leq r\leq\varphi_1(\theta),\ \theta_0\leq\theta\leq\theta_1\}$ として示す. $r_{\max}=\max\{\varphi_1(\theta) : \theta_1\leq\theta\leq\theta_1\}$, $r_{\min}=\min\{\varphi_0(\theta) : \theta_0\leq\theta\leq\theta_1\}$ である. $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ なので, $g(r)=r^\alpha$ とおくと,

$$\iint_D \frac{g'(r)}{r}dx\,dy=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} g'(r)dr\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}[g(\varphi_1(\theta))-g(\varphi_0(\theta))]d\theta$$

となり, 次式を得る.

$$\alpha\iint_D \frac{r^\alpha}{r^2}dx\,dy=\int_{\theta_0}^{\theta_1}[\varphi_1(\theta)^\alpha-\varphi_0(\theta)^\alpha]d\theta$$

$\alpha>0$ のときは $\varphi_1(\theta)^\alpha-\varphi_0(\theta)^\alpha\leq(r_{\max})^\alpha$ となり,

$$\alpha\iint_D \frac{r^\alpha}{r^2}dx\,dy\leq\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_{\max})^\alpha d\theta=(r_{\max})^\alpha(\theta_1-\theta_0)$$

$\alpha<0$ のときは $\varphi_0(\theta)^\alpha-\varphi_1(\theta)^\alpha\leq(r_{\min})^\alpha$ となり,

$$\begin{aligned}|\alpha|\iint_D \frac{r^\alpha}{r^2}dx\,dy&=\int_{\theta_0}^{\theta_1}[\varphi_0(\theta)^\alpha-\varphi_1(\theta)^\alpha]d\theta\\&\leq\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_{\min})^\alpha d\theta=(r_{\min})^\alpha(\theta_1-\theta_0)\end{aligned}$$

$\theta_1-\theta_0\leq 2\pi$ より証明を終える. □

**注意 3.7.7** 開円盤 $D$ の点 $\zeta$ に対し, $z=\zeta+re^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくと $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ なので, $|f(z)|\leq M$ とすれば,

$$\left|\iint_D \frac{f(z)}{(z-\zeta)^\alpha}dx\,dy\right|\leq\iint_D\frac{|f(z)|}{r^\alpha}dx\,dy\leq\iint_D Mr^{1-\alpha}dr\,d\theta$$

は $\alpha\leq 1$ のとき有界であり, $\alpha>1$ のときは一般には発散する.

### 3.7.3 鍵になる補題

**補題 3.7.8** 原点中心の半径 $R$ の開円盤 $D$ 上の関数 $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ が

$$|f(z)| \le M, \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \le L|z_1 - z_2|^\alpha \tag{3.7.3}$$

を満たすとする．$F(\zeta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \frac{f(z)}{z-\zeta}dx\,dy$ とおくと，

$$F_{\bar z}(\zeta) = f(\zeta), \qquad F_z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z) - f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}dx\,dy$$

が成り立ち，$\alpha$ には依存するが $R$ に依存しない定数 $C$ が存在して，

$$|F(z)| \le 2RM,\ |F_z(\zeta)| \le \frac{2}{\alpha}R^\alpha L,\ |F_z(z_1) - F_z(z_2)| \le CL|z_1 - z_2|^\alpha \tag{3.7.4}$$

この補題が鍵であるが，証明を始める前に，ノルムを定義しておこう．

**定義 3.7.9（ノルム $\|\boldsymbol{w}\|_0$, $\|\boldsymbol{w}\|_1$）**　$w \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ に対し，$\|w\|_0$ を次で定める．

$$\begin{aligned}\|w\|_0 := &\sup\{|w(z)| : z \in \overline{D}\}\\ &+ R^\alpha \sup\left\{\frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} : z_1, z_2 \in \overline{D}, z_1 \ne z_2\right\}\end{aligned}$$

$C^{0,\alpha}(\overline{D})$ はこのノルムについてバナッハ代数[11]になる．

$w \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ に対し，$\|w\|_1$ を次で定める．

$$\|w\|_1 := \sup\{|w(z)| : z \in \overline{D}\} + R\|w_z\|_0 + R\|w_{\bar z}\|_0$$

$C^{1,\alpha}(\overline{D})$ はこのノルムについてバナッハ空間になる．

**例 3.7.10**　$w(z) = az + b$ のとき，

$$\begin{aligned}\|w\|_0 &= \sup\{|az+b| : z \in D\} + R^\alpha \sup\left\{\frac{|a(z_1 - z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} : z_1 \ne z_2, z_1, z_2 \in D\right\}\\ &\le |a|R + |b| + |a|R^\alpha(2R)^{1-\alpha} = (1 + 2^{1-\alpha})|a|R + |b|\\ \|w\|_1 &= \sup\{|az+b| : |z| \le R\} + R\|w_z\|_0 \le 2|a|R + |b|\end{aligned}$$

**注意 3.7.11**　前補題の状況を考える．条件 (3.7.3) より $\|f\|_0 \le M + R^\alpha L$

[11] バナッハ空間で環であり，$\|w_1 w_2\|_0 \le \|w_1\|_0 \|w_2\|_0$ を満たすもの．

で，条件 (3.7.4) より $\|F_z\|_0 \leq 2\alpha^{-1}R^\alpha L + R^\alpha CL$ となる．$F_{\bar{z}} = f$ なので

$$\begin{aligned}\|F\|_1 &= \sup\{|F(z)| : z \in \overline{D}\} + R\|F_z\|_0 + R\|F_{\bar{z}}\|_0 \\ &\leq 2RM + R(2\alpha^{-1}R^\alpha L + R^\alpha CL) + R(M + R^\alpha L) \\ &\leq R(3M + (2\alpha^{-1} + C + 1)R^\alpha L)\end{aligned}$$

特に $M = \|f\|_0$, $L = \|f\|_0/R^\alpha$ とできるので次を得る．

$$\|F\|_1 \leq RC_\alpha\|f\|_0, \qquad C_\alpha = 3 + 2\alpha^{-1} + C + 1$$

**補題 3.7.12**　$w \in C^{1,\alpha}(D)$ に対し，$\|w\|_0 \leq 5\|w\|_1$.

**証明**　$z_1, z_2 \in D$ に対し，次を満たす $t$ $(0 \leq t \leq 1)$ が存在する．

$$w(z_1) - w(z_2) = w_z(\zeta)(z_1 - z_2) + w_{\bar{z}}(\zeta)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

ただし $\zeta = z_1 + t(z_2 - z_1)$ である．よって次式が成立する．

$$\frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq |w_z(\zeta)| + |w_{\bar{z}}(\zeta)| \leq \frac{2\|w\|_1}{R}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} &= \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2|^\alpha}\frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \\ &\leq |z_1 - z_2|^{1-\alpha}\frac{2\|w\|_1}{R} \leq (2R)^{1-\alpha}\frac{2\|w\|_1}{R} \\ &= \frac{2^{2-\alpha}\|w\|_1}{R^\alpha}\end{aligned}$$

が成立し，$\|w\|_0 \leq (1 + 2^{2-\alpha})\|w\|_1$ がわかる．　□

**補題 3.7.13（縮小写像の原理）**　完備距離空間 $(X, d)$ に対し，写像 $\Psi : X \to X$ が縮小写像，すなわち，$0 < C < 1$ を満たす定数 $C$ が存在して，

$$d(\Psi x, \Psi y) \leq Cd(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

ならば，$\Psi w = w$ を満たす $w \in X$ がただ 1 つ存在する．

**証明**　$x_0 \in X$ を任意にとり固定する．$x_{k+1} = \Psi(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと，$\{x_k\}_k$ はコーシー列．実際，$l > n$ に対し

$$\begin{aligned} d(x_n, x_l) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{l-1}, x_l) \\ &\le [C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{l-1}] d(x_0, x_1) \\ &< \frac{C^n}{1-C} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

より，$\varepsilon > 0$ に対し $\frac{C^n}{1-C} d(x_0, x_1) < \varepsilon/2$ となるように $n$ を選べば，$n \le k < l$ のとき $d(x_k, x_l) \le d(x_k, x_n) + d(x_n, x_l) \le \varepsilon$ を得る．完備性より，$\{x_n\}_n$ の極限が存在するのでそれを $w$ とすると，$\Psi w = w$ である．$\Psi z = z$ なる $z \in X$ をとると $d(z, w) = d(\Psi z, \Psi w) \le Cd(z, w)$ なので $d(z, w) = 0$ となり $z = w$. □

### 3.7.4　ベルトラミの方程式の解の存在

ベルトラミの方程式 $w_{\bar z} = \mu w_z$ を解くため，より一般に次の方程式の解の存在を考察する．

$$w_{\bar z} = \mu w_z + \gamma w + \delta \tag{3.7.5}$$

**補題 3.7.14**　$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．$\mu, \gamma, \delta \in C^{n,\alpha}(\overline{D})$ ならば，$w_{\bar z} = \mu w_z + \gamma w + \delta$ を満たす $w \in C^{n+1,\alpha}(\overline{D})$ が存在する．

**証明**　$\mu, \gamma, \delta \in C^{n,\alpha}(\overline{D})$ とする．$w = e^{\lambda}\sigma$ とおいて，$w_{\bar z} = \mu w_z + \gamma w + \delta$ を書き直すと，

$$\sigma(\lambda_{\bar z} - \mu\lambda_z - \gamma) + \sigma_{\bar z} = \mu\sigma_z + e^{-\lambda}\delta$$

なので，次を満たす $\lambda, \sigma \in C^{n+1,\alpha}(\overline{D})$ が存在すれば十分．

$$\lambda_{\bar z} = \mu\lambda_z + \gamma, \qquad \sigma_{\bar z} = \mu\sigma_z + e^{-\lambda}\delta$$

よって $\gamma = 0$ の場合にのみ補題を示せば十分である．

$n$ に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは後述の補題である．$n \ge 1$ として，$n-1$ のときを仮定して $n$ のときを示す．$w_{\bar z} = \mu w_z + \delta$ を微分すると $(w_{\bar z})_z = \mu_z w_z + \mu w_{zz} + \delta_z$ となる．$f = w_z$ とおくと，

$$f_{\bar{z}} = \mu_z f + \mu f_z + \delta_z, \quad \mu, \mu_z, \delta_z \in C^{n-1,\alpha}(\overline{D})$$

なので，帰納法の仮定よりこれを満たす $f \in C^{n,\alpha}(\overline{D})$ が存在する．

$$\bar{W}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{f}(z)}{z-\zeta}dx\,dy$$

とおくと，$W(\zeta)$ が求めるものである．実際，補題 3.7.8 より $\bar{W}_{\bar{z}} = \bar{f} = \overline{w_z}$ であり，$W_z = w_z$ は $C^{n+1}$ 級．$W(\zeta) = w(\zeta) + G(\bar{z}_0)$ なる正則関数 $G(z)$ があるので，$W_{\bar{z}} = w_{\bar{z}}$ で，補題 3.7.8 の積分表示より，これは $C^n$ 級．よって $W$ は $C^{n+1}$ 級で $W \in C^{n+1,\alpha}(\overline{D})$ となる． □

**補題 3.7.15** $R$ を十分小さい正の数とするとき，$\mu, \delta \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ ならば，$w_{\bar{z}} = \mu w_z + \delta$ を満たす $w \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ が存在する．

**証明** $z' = z + \mu(0)\bar{z}$ $(|\mu(0)| \neq 1)$ とおくと $\bar{z}' = \bar{\mu}(0)z + \bar{z}$ であり，

$$\partial_z = \partial_{z'} + \bar{\mu}(0)\partial_{\bar{z}'}, \qquad \partial_{\bar{z}} = \mu(0)\partial_{z'} + \partial_{\bar{z}'}$$

を得る．$w_{\bar{z}} = \mu w_z + \delta$ は $w_{\bar{z}'} + \mu(0)w_{z'} = \mu(w_{z'} + \mu(0)w_{\bar{z}'}) + \delta$ となり，

$$w_{\bar{z}'} = \frac{1}{1-\mu\mu(0)}[(\mu - \mu(0))w_{z'} + \delta]$$

を得る．よって $\mu(0) = 0$ と仮定してよい．正則関数 $g(\zeta)$ に対して

$$w(\zeta) - F(\zeta) = g(\zeta), \quad F(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z + \delta}{z-\zeta}dx\,dy \tag{3.7.6}$$

を満たす $w \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ が存在[12]すれば，$w_{\bar{z}}(\zeta) = F_{\bar{z}}(\zeta) = \mu(\zeta)w_z(\zeta) + \delta(\zeta)$ (補題 3.7.8), $g_{\bar{z}}(\zeta) = 0$ なので，$w_{\bar{z}} = \mu w_z + \delta$ となる．$C_0 = -F(0)$, $C_1 = -F_z(0)$, $\hat{g}(\zeta) = g(\zeta) - C_0 - C_1\zeta$ とおくと $\hat{g}$ は正則関数で，式 (3.7.6) は次式となる．

$$w(\zeta) - F(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + \hat{g}(\zeta), \quad \hat{g}(0) = w(0), \quad \hat{g}_z(0) = w_z(0)$$

$F(\zeta)$ の定義と補題 3.7.8, $\mu(0) = 0$ より，$C_0$, $C_1$ は次のように表示される．

---

[12] $\delta = 0$ のとき，正則関数 $g(\zeta)$ が 0 でないとすれば，$w$ は自明でない解になることに注意．

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z + \delta}{z}dx\,dy, \quad C_1 = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z + \delta - \delta(0)}{z^2}dx\,dy$$

方程式 (3.7.6) を積分を用いて書くと，次のようになる．

$$\begin{aligned}w(\zeta) &+ \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z}{z-\zeta}dx\,dy - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z}{z}dx\,dy - \frac{\zeta}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z}{z^2}dx\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\delta}{z-\zeta}dx\,dy + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\delta}{z}dx\,dy + \frac{\zeta}{\pi}\iint_D \frac{\delta - \delta(0)}{z^2}dx\,dy + \hat{g}(\zeta)\end{aligned}$$

この右辺を $h(\zeta)$ と書くと，注意 3.7.7 より，$h \in C^{1,\alpha}(D)$ である[13]．$U(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z}{z-\zeta}dx\,dy$ とおくと，補題 3.7.8 より次式が成り立つ．

$$U_z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mu w_z}{(z-\zeta)^2}dx\,dy$$

$\Phi w(\zeta) = U(\zeta) - U(0) - \zeta U_z(0)$ とおくとき，方程式 (3.7.6) は

$$w = \Phi w + h \qquad (h \in C^{1,\alpha}(D))$$

となるので，これを満たす $w \in C^{1,\alpha}(D)$ の存在を示したい．

$R$ に依存しない定数 $C'$ が存在して $\|\Phi w\|_1 \leq C' R^\alpha \|w\|_1$ となることを示そう．

$$L = \sup\left\{ \frac{|\mu(z_1) - \mu(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} : z_1, z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2 \right\}$$

とおくと，$\mu(0) = 0$ より，$|\mu(z)| \leq LR^\alpha$ で $\|\mu\|_0 \leq LR^\alpha + R^\alpha L = 2LR^\alpha$．

$$\begin{aligned}|\mu w_z(z)| \leq \|\mu w_z\|_0 \leq \|\mu\|_0 \|w_z\|_0 &\leq 2LR^\alpha \|w\|_1 / R \\ &= 2LR^{\alpha-1}\|w\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{|\mu w_z(z_1) - \mu w_z(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} \leq \frac{\|\mu w_z\|_0}{R^\alpha} &\leq \frac{2LR^\alpha \|w_z\|_0}{R^\alpha} \\ &= 2L\|w_z\|_0 \leq \frac{2L\|w\|_1}{R}\end{aligned}$$

より $\|\mu w_z\|_0 \leq 4LR^{\alpha-1}\|w\|_1$ となる．よって次の評価

[13] 正確には積分と微分の順序交換定理を用いる．

$$\begin{aligned}\|\Phi w(\zeta)\|_1 &\leq \|U(\zeta)\|_1 + \|U(0) + \zeta U_z(0)\|_1 \\ &\leq \|U(\zeta)\|_1 + |U(0)| + 2R|U_z(0)| \\ &\leq 3\|U(\zeta)\|_1 \leq 3RC_\alpha\|\mu w_z\|_0 \qquad \text{(補題 3.7.8 より)} \\ &\leq 12LC_\alpha R^\alpha\|w\|_1 = C'R^\alpha\|w\|_1 \qquad (C' = 12LC_\alpha)\end{aligned}$$

で $C'$ の存在がわかる．$C'R^\alpha < \min\{1, \frac{1}{3}\|h\|_1\}$ なるように正の数 $R$ を小さくとる．$X = \{w \in C^{1,\alpha}(\overline{D}) : \|w\|_1 \leq \frac{3}{2}\|h\|_1\}$ とおけば，$w \in X$ に対し，

$$\begin{aligned}\|\Phi w + h\|_1 &\leq \|\Phi w\|_1 + \|h\|_1 \leq C'R^\alpha\|w\|_1 + \|h\|_1 \\ &\leq \frac{1}{3}\|h\|_1\|w\|_1 + \|h\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2}\|h\|_1 + \|h\|_1 = \frac{3}{2}\|h\|_1\end{aligned}$$

なので，$\Psi w = \Phi w + h$ は写像 $\Psi : X \to X$ を定める．$\Psi w = w$ を満たす $w \in X$ の存在を示せばよい．$X$ は $C^{1,\alpha}(\overline{D})$ 内の閉集合であり，完備距離空間となる．

$$\|\Psi w_1 - \Psi w_2\|_1 = \|\Phi w_1 - \Phi w_2\|_1 = \|\Phi(w_1 - w_2)\|_1 \leq C'R^\alpha\|w_1 - w_2\|_1$$

で，$C'R^\alpha < 1$ より $\Psi$ は縮小写像であり，定理 3.7.13 より $\Psi w = w$ を満たす $w \in X$ が存在することがわかる．　□

**補題 3.7.8 の証明**　$\widetilde{F}(z) = F(z) - f(\zeta)\bar{z}$ は複素関数として $z = \zeta$ で微分可能なことを示す．系 3.7.5 より $\widetilde{F}(z') = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-z'}dx\,dy$ であるから，

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\left|\frac{\widetilde{F}(\zeta+h) - \widetilde{F}(\zeta)}{h} + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}dx\,dy\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\lim_{h\to0}\iint_D (f(z)-f(\zeta))\left[\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{z-\zeta-h} + \frac{1}{z-\zeta}\right) + \frac{1}{(z-\zeta)^2}\right]dx\,dy\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\iint_D (f(z)-f(\zeta))\left[\lim_{h\to0}\frac{-1}{(z-\zeta)(z-\zeta-h)} + \frac{1}{(z-\zeta)^2}\right]dx\,dy\right| = 0\end{aligned}$$

よって $\widetilde{F}_{\bar{z}}(\zeta) = 0$ となり，$F_{\bar{z}}(\zeta) = f(\zeta)$ かつ

$$F_z(\zeta) = \frac{d}{dz}(F(z) - f(\zeta)\bar{z})|_{z=\zeta} = \widetilde{F}_z(\zeta)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}dx\,dy$$

ここで $r_{\max} = \max\{|z-\zeta| : z \in \partial D\}$, $r_{\min} = \min\{|z-\zeta| : z \in \partial D\}$,$z = \zeta + re^{\sqrt{-1}\theta}$ と書くと，補題 3.7.6 より，

$$|F(\zeta)| \le \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{|f(z)|}{|z-\zeta|}dx\,dy \le \frac{M}{\pi}\iint_D \frac{dx\,dy}{|z-\zeta|}$$
$$\le \frac{2\pi M}{\pi} r_{\max} \le 2RM$$

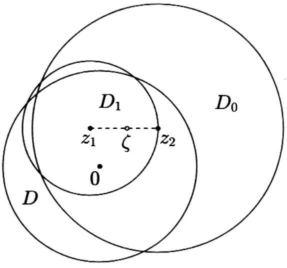
$F_z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}dx\,dy$ なので

$$|F_z(\zeta)| \le \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|^2}dx\,dy \le \frac{L}{\pi}\iint_D \frac{|z-\zeta|^\alpha}{|z-\zeta|^2}dx\,dy$$
$$= \frac{L}{\pi}\iint_D \frac{r^\alpha}{r^2}dx\,dy \le \frac{2\pi L}{\pi\alpha}(r_{\max})^\alpha \quad (\text{補題 } 3.7.6)$$
$$\le \frac{2L}{\alpha}R^\alpha$$

$z_2$ を中心とする半径 $2|z_1 - z_2|$ の開円盤を $D_0$ と書くと，

$$\pi[F_z(z_1) - F_z(z_2)]$$
$$= -\iint_{D\cap D_0} \frac{f(z)-f(z_1)}{(z-z_1)^2}dx\,dy + \iint_{D\cap D_0} \frac{f(z)-f(z_2)}{(z-z_2)^2}dx\,dy \tag{3.7.7}$$
$$+ \iint_{D\setminus D_0} (f(z)-f(z_1))\left[\frac{1}{(z-z_2)^2} - \frac{1}{(z-z_1)^2}\right]dx\,dy \tag{3.7.8}$$
$$+ \iint_{D\setminus D_0} \frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z-z_2)^2}dx\,dy \tag{3.7.9}$$

が成り立つ．




$z \in D_0$ に対して，$|z - z_2| \le 2|z_1 - z_2|$ より

$$|z - z_1| \le |z - z_2| + |z_1 - z_2| \le 3|z_1 - z_2|$$

である．$D_1$ を $z_1$ 中心の半径 $|z_1 - z_2|$ の円盤とすると，$z \in D_1$ のときは $|z - z_1| \le |z_1 - z_2|$ で，

$z \in D_0 \setminus D_1$ のときは $|z - z_1| \geq |z_1 - z_2|$ なので

$$
\begin{aligned}
&|\,式\,(3.7.7)\,の第\,1\,項\,| \\
&\leq \iint_{D\cap D_0} \frac{L|z-z_1|^\alpha}{|z-z_1|^2} dx\,dy \leq L \iint_{D_0} |z-z_1|^{\alpha-2} dx\,dy \\
&= L\left(\iint_{D_1} |z-z_1|^{\alpha-2} dx\,dy + \iint_{D_0\setminus D_1} |z-z_1|^{\alpha-2} dx\,dy\right) \\
&\leq L\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{|z_1-z_2|} r^{\alpha-1} dr + \iint_{D_0\setminus D_1} |z_1-z_2|^{\alpha-2} dx\,dy\right) \\
&= L\left(2\pi \frac{|z_1-z_2|^\alpha}{\alpha} + 4\pi |z_1-z_2|^\alpha\right) \\
&= 2\pi L(\alpha^{-1}+2)|z_1-z_2|^\alpha
\end{aligned}
\tag{3.7.10}
$$

$z = z_2 + re^{\sqrt{-1}\theta}$ と書くと，$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ より次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
|\,式\,(3.7.7)\,の第\,2\,項\,| &\leq \iint_{D\cap D_0} \frac{L|z-z_2|^\alpha}{|z-z_2|^2} dx\,dy \\
&\leq L \iint_{D_0} r^{\alpha-2} dx\,dy \\
&\leq L \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2|z_1-z_2|} r^{\alpha-1} dr \\
&= \frac{2\pi L}{\alpha}(2|z_1-z_2|)^\alpha
\end{aligned}
\tag{3.7.11}
$$

$z \in D \setminus D_0$ とすると $|z - z_2| \geq 2|z_1 - z_2|$ であり，

$$
|z-z_1| \geq |z-z_2| - |z_1-z_2| \geq 2|z_1-z_2| - |z_1-z_2| = |z_1-z_2|
$$

なので $\zeta$ を $z_1, z_2$ を結ぶ線分上を動くとして

$$
\begin{aligned}
|\,式\,(3.7.8)| &\leq \left|\iint_{D\setminus D_0} (f(z)-f(z_1)) \int_{z_1}^{z_2} \frac{2}{(z-\zeta)^3} d\zeta\,dx\,dy\right| \\
&\leq \left|\int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D\setminus D_0} (f(z)-f(\zeta)+f(\zeta)-f(z_1)) \frac{2}{(z-\zeta)^3} dx\,dy\right) d\zeta\right| \\
&\leq \left|\int_{z_1}^{z_2} \iint_{D\setminus D_0} \left(\frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|^3} + \frac{|f(\zeta)-f(z_1)|}{|z-\zeta|^3}\right) dx\,dy\,d\zeta\right|
\end{aligned}
\tag{3.7.12}
$$

$$r_{\min} = \min\{|z-\zeta| : z \in \partial(D \setminus D_0)\}$$
$$r_{\max} = \max\{|z-\zeta| : z \in \partial(D \setminus D_0)\}$$

とおく．$z \in D \setminus D_0$ ならば $|z-z_2| \geq 2|z_1-z_2|$ より

$$|z-\zeta| \geq |z-z_2| - |\zeta - z_2| \geq 2|z_1-z_2| - |z_1-z_2| = |z_1-z_2|$$

なので $r_{\min} \geq |z_1-z_2|$ である．$z = \zeta + re^{\sqrt{-1}\theta}$ と書けば

$$\begin{aligned}\iint_{D\setminus D_0} \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|^3}dx\,dy &\leq L\iint_{D\setminus D_0}\frac{|z-\zeta|^{\alpha-1}}{|z-\zeta|^2}dx\,dy \\ &\leq L\iint_{D\setminus D_0}\frac{r^{\alpha-1}}{r^2}dx\,dy \leq \frac{2\pi L}{1-\alpha}(r_{\min})^{\alpha-1} \quad (\text{補題 } 3.7.6) \\ &\leq \frac{2\pi L}{1-\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha-1}\end{aligned}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}\iint_{D\setminus D_0} \frac{|f(z_1)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|^3}dx\,dy &\leq L|z_1-\zeta|^{\alpha}\iint_{D\setminus D_0}\frac{|z-\zeta|^{-1}}{|z-\zeta|^2}dx\,dy \\ &\leq L|z_1-\zeta|^{\alpha}\iint_{D\setminus D_0}\frac{r^{-1}}{r^2}dx\,dy \leq 2\pi L|z_1-\zeta|^{\alpha}(r_{\min})^{-1} \quad (\text{補題 } 3.7.6) \\ &\leq 2\pi L|z_1-z_2|^{\alpha-1}\end{aligned}$$

も成り立つので，

$$\begin{aligned}\text{式 } (3.7.12) &\leq \left|2\pi L\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{1}{1-\alpha}+1\right)|z_1-z_2|^{\alpha-1}d\zeta\right| \\ &= \frac{2\pi L(2-\alpha)}{1-\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha-1}\int_{z_1}^{z_2}|d\zeta| \\ &= \frac{2\pi L(2-\alpha)}{1-\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha} \qquad (3.7.13)\end{aligned}$$

系 3.7.5 より，$\iint_D \frac{dx\,dy}{z-z_2} = -\bar{z}_2$, $\iint_{D_0}\frac{dx\,dy}{z-z_2} = 0$ なので，

$$\iint_{D\setminus D_0}\frac{dx\,dy}{z-z_2} = -\bar{z}_2$$

これを $z_2$ で微分すると，

$$\iint_{D\setminus D_0} \frac{dx\,dy}{(z-z_2)^2} = 0$$

であり，式 (3.7.9) の積分は 0 である．式 (3.7.10), (3.7.11), (3.7.13) を勘案すると，

$$\pi|F_z(z_1) - F_z(z_2)| \leq L\left[2(\alpha^{-1}+2) + 2^{\alpha+1}\alpha^{-1} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right]|z_1 - z_2|^\alpha$$

を得る． □

# 演習の解答例

**1.1.1** 式 (1.1.1) より，$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, $\cos\theta = 1-y/r$ なので，

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}=\frac{1-(1-y/r)^2}{(y/r)^2}=\frac{2r}{y}-1$$

**1.1.2** 星芒形は $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ であるから，両辺を 3 乗して移項すれば，

$$x^2+y^2-a^2=-3(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}})=-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})=-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

を得る．これを 3 乗すれば求める式 $(x^2+y^2-a^2)^3=-27a^2x^2y^2$ を得る．逆に，この式を仮定すれば $x^2+y^2-a^2=-3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ であり，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^3-(a^{\frac{2}{3}})^3 &= x^2+3|xy|^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})+y^2-a^2\\ &= 3|xy|^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})-3|xy|^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}=3|xy|^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})\end{aligned}$$

よって $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})[(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2+(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}-3|xy|^{\frac{2}{3}}]=0$ となるが，第 2 の因子は，$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2+(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}-3|xy|^{\frac{2}{3}}=[x^{\frac{4}{3}}-|xy|^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}]+(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}>0$ より $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ がわかる．

**1.2.1** 弧長変数を明示的に表示するのは一般には困難である．この演習は弧長変数が明示的に求まる例であるが，具体的表示は結構面倒な形をしている．

(1) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{1+4t^2}dt=2\int_0^a\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}dt=\left[t\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left(t+\sqrt{t^2+\tfrac{1}{4}}\right)\right]_0^a$
$\displaystyle =a\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}}+\tfrac{1}{4}\log\left(a+\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}}\right)+\tfrac{1}{4}\log 2$

(2) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_0^a\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^a=\frac{e^a-e^{-a}}{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}dt=\int_0^a t\sqrt{4+9t^2}dt=\frac{1}{18}\int_0^a\sqrt{4+9t^2}d(4+9t^2)$
$=\frac{1}{18}\frac{2}{3}[(4+9t^2)^{3/2}]_0^a=\frac{1}{27}((4+9a^2)^{3/2}-8)$

(4) 指数関数のグラフ $x=\log y$ $(1\le y\le e^a)$ の弧長を求めればよいので，

$$\int_1^{e^a}\sqrt{1+(\log y)'^2}dy=\int_1^{e^a}\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}dy=\int_1^{e^a}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}dy$$

なる積分を計算すればよい．$y=\frac{t^2-1}{2t}$ とおくと $\sqrt{1+y^2}=\frac{1+t^2}{2t}$, $dy=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$ なので，

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\int_{1+\sqrt{2}}^{e^a+\sqrt{1+e^{2a}}}\frac{(t^2+1)^2}{(t^2-1)}\frac{dt}{2t^2}=\int_{1+\sqrt{2}}^{e^a+\sqrt{1+e^{2a}}}\frac{(t^2-1)^2+4t^2}{2(t^2-1)t^2}dt\\ &=\int_{1+\sqrt{2}}^{e^a+\sqrt{1+e^{2a}}}\left(\frac{t^2-1}{2t^2}+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=\left[\frac{t+1/t}{2}-\log\frac{t+1}{t-1}\right]_{1+\sqrt{2}}^{e^a+\sqrt{1+e^{2a}}}\end{aligned}$$

この値を計算して $\sqrt{1+e^{2a}}-\sqrt{2}+a-\log(1+\sqrt{1+e^{2a}})+\log(1+\sqrt{2})$ を得る．

(5) $\displaystyle\int_0^a\left[\left(\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}\right)^2\right]^{1/2}dt=\int_0^a\frac{t\sqrt{4+t^2}}{1+t^2}dt$

$\displaystyle=\int_0^a\frac{t(4+t^2)}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}dt=\int_0^a\left(\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}+\frac{3t}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}\right)dt$

$\displaystyle=\left[\sqrt{4+t^2}\right]_0^a+\int_0^a\frac{3t}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}dt$

第 2 項の積分は $s=\sqrt{4+t^2}$ とおくと $t\,dt=s\,ds$ なので次を得る．

$$\int_2^{\sqrt{4+a^2}}\frac{3ds}{s^2-3}=-\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{s+\sqrt{3}}{s-\sqrt{3}}\right]_2^{\sqrt{4+a^2}}$$

よって求める値は

$$\sqrt{4+a^2}-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\log\frac{\sqrt{4+a^2}+\sqrt{3}}{\sqrt{4+a^2}-\sqrt{3}}-\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$
$$=\sqrt{4+a^2}-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\log\frac{(\sqrt{4+a^2}+\sqrt{3})^2}{1+a^2}-\log(2+\sqrt{3})^2\right)$$
$$=\sqrt{4+a^2}-2-\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{4+a^2}+\sqrt{3}}{\sqrt{1+a^2}(2+\sqrt{3})}$$

**1.2.2** $8a$, $\frac{a}{2}(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))$

**1.3.1** $\dot{\gamma}(t)=2r(k-1)\sin\frac{kt}{2}(-\cos\frac{(k-2)t}{2},\sin\frac{(k-2)t}{2})$ より，弧長変数 $s$ は $\frac{ds}{dt}=2r(k-1)\sin\frac{kt}{2}$ を満たし，

$$\boldsymbol{e}=\left(-\cos\frac{(k-2)t}{2},\sin\frac{(k-2)t}{2}\right),\quad \boldsymbol{n}=-\left(\sin\frac{(k-2)t}{2},\cos\frac{(k-2)t}{2}\right)$$

よって $\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}=\frac{1}{ds/dt}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}=-\frac{k-2}{4r(k-1)\sin\frac{kt}{2}}\boldsymbol{n}$ であり $\kappa=-\frac{k-2}{4r(k-1)\sin\frac{kt}{2}}$ がわかる．

**1.3.2** $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入して整理すると $r^4=2a^2r^2\cos 2\theta$ となるので，$r^2=2a^2\cos 2\theta$ を得る．$f(\theta)=a\sqrt{2\cos 2\theta}$ とおくと，$f'(\theta)=a\sqrt{2}\sin 2\theta/\sqrt{\cos 2\theta}$, $f''(\theta)=-2a\sqrt{2\cos 2\theta}-\sqrt{2}\sin^2 2\theta(\cos 2\theta)^{3/2}$ より，$\kappa=\frac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2}a}=\frac{3r}{2a^2}$.

**1.3.3** 定理 1.3.6，$\kappa'=\dot{\kappa}/|\dot{\gamma}|$ を用いて計算すればよい．

**1.3.4** $\kappa=a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)(b^4x^2+a^4y^2)^{-3/2}$

**1.3.5** 例 1.1.2 の径数表示で $\kappa=-ab(a^2\sinh^2\theta+b^2\cosh^2\theta)^{-3/2}$．陰関数表示だと，$\kappa=a^2b^2(a^2y^2-b^2x^2)(b^4x^2+a^4y^2)^{-3/2}$.

**1.4.1** 例 1.3.2 の記号の下で，次を得る．

$$\gamma(t)+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}=\frac{r(k+1)}{k+2}\left(\cos t+\frac{\cos(k+1)t}{k+1},\sin t+\frac{\sin(k+1)t}{k+1}\right)$$

これは元のエピサイクロイドを $1/(k+2)$ 倍して得られるエピサイクロイドである．

**1.4.2** 演習 1.3.1 の記号の下で，次を得る．

$$\gamma(t)+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}=\frac{rk(k-1)}{k-2}\left(\cos t+\frac{\cos(k-1)t}{k-1},\sin t-\frac{\sin(k-1)t}{k-1}\right)$$

これは元のハイポサイクロイドを $k/(k-2)$ 倍したものである．

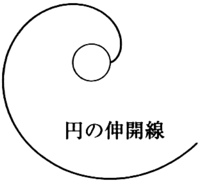
**1.4.3** 伸開線 $\gamma$ のフレネ枠を $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$，曲率を $\kappa$ とする．本文中と同じように $\varepsilon$ のフレネ枠を $\bar{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{n}$, $\bar{\boldsymbol{n}}=-\boldsymbol{e}$ とし対応する曲率を $\bar{\kappa}$ とする．$\varepsilon=\gamma+(1/\kappa)\boldsymbol{n}$ である．$\rho=1/\kappa$ が $\varepsilon$ の弧長変数なので，$\rho=\pm s+s_0$．$\boldsymbol{n}=\frac{d\varepsilon}{d\rho}$ なので，$d\varepsilon/ds=\pm d\varepsilon/d\rho=\pm\boldsymbol{n}$ となり

$$\gamma = \varepsilon - \rho \boldsymbol{n} = \varepsilon - (\pm s - s_0)\left(\pm \frac{d\varepsilon}{ds}\right) = \varepsilon - (s \mp s_0)\varepsilon'$$

$s \mp s_0$ も $\varepsilon$ の弧長変数なのでそれを改めて $s$ とおけばよい.

**1.4.4** $s = a(t+t_0)$ が弧長変数なので前問より，次を得る.

$$(x, y) = a(\cos t + (t+t_0)\sin t,\ \sin t - (t+t_0)\cos t)$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{1+(t+t_0)^2}$$




**1.4.5** 演習 1.4.3 より $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \varepsilon(t) - \frac{\overset{\bullet}{\varepsilon}(t)}{|\overset{\bullet}{\varepsilon}(t)|}\int_{t_0}^{t} |\overset{\bullet}{\varepsilon}(\tau)| d\tau$.

**1.5.1** 接線族の式を $u$ で微分すると $0 = f''(u)(x-u) - f'(u) + f''(u) = f''(u)(x-u)$. $f''(u) \neq 0$ ならば $x - u = 0$ となり，$y = f(u)$ つまり $y = f(x)$.

**1.5.2** 中点 $B$ の座標は $(\frac{a+\cos t}{2}, \frac{\sin t}{2})$，直線 $PA$ の方向ベクトルは $(\cos t - a, \sin t)$ なので，直線族の式は次で与えられる.

$$(\cos t - a)\left(x - \frac{a+\cos t}{2}\right) + \sin t\left(y - \frac{\sin t}{2}\right) = 0$$

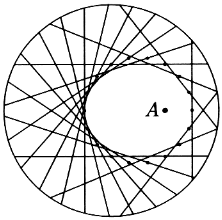
整理して $x\cos t + y\sin t = \frac{2ax+1-a^2}{2}$ を得るが，この式を $t$ で微分すると，$-x\sin t + y\cos t = 0$ なので次を得る.

$$\cos t = \frac{x(2ax+1-a^2)}{2(x^2+y^2)}, \qquad \sin t = \frac{y(2ax+1-a^2)}{2(x^2+y^2)}$$

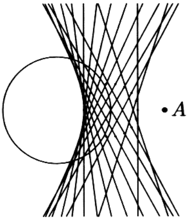
これらの 2 乗和をとると $\frac{(2ax+1-a^2)^2(x^2+y^2)}{4(x^2+y^2)^2} = 1$ となり，整理して

$$(1-a^2)(x+\frac{a}{2})^2 + y^2 = (1-a^2)\left[\frac{1-a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right] = \frac{1-a^2}{4}$$

を得るので，求める包絡線は $|a| < 1$ なら楕円，$|a| > 1$ なら双曲線である.



$|a| < 1$



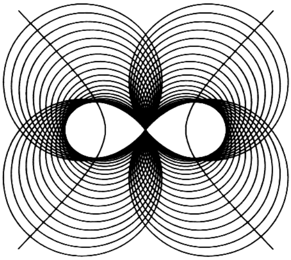
$|a| > 1$

**1.5.3** 点 $(x, y) = (\pm a\sqrt{1+(t/b)^2}, t)$ を中心とし原点を通る円は $x^2 \mp 2ax\sqrt{1+(t/b)^2} + y^2 - 2ty = 0$ であるが，書き換えると，

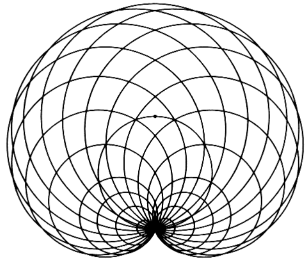
$$(x^2+y^2-2ty)^2 = 4a^2x^2(1+(t/b)^2)$$

これを $t$ で微分すると，$-4y(x^2+y^2-2ty) = 8(a/b)^2tx^2$ を得る．これを $t$ について解き，$t$ を消去すると，$4(b^2y^2 - a^2x^2) = (x^2+y^2)^2$ を得る．(次頁左図)

**1.5.3**



**1.5.4**



**1.5.4** 中心が $(a\sin\theta\cos\theta, a\sin^2\theta)$ で半径 $a\sin\theta$ の円の族であるから，考えている円の族の方程式は $(x-a\sin\theta\cos\theta)^2+(y-a\sin^2\theta)^2-a^2\sin^2\theta=0$. これより $x^2-ax\sin 2\theta+y^2-ay(1-\cos 2\theta)=0$ なので

$$x^2+y^2-ay-a(x\sin 2\theta-y\cos 2\theta)=0 \tag{A.1}$$

を得る．これを $\theta$ で微分したものを整理すると，$x\cos 2\theta+y\sin 2\theta=0$ である．$(x,y)$ と $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ は直交するので，

$$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x)$$

これを式 (A.1) に戻せば $x^2+y^2-ay=\frac{\pm 2axy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ で，$(x^2+y^2-ay)^2=\frac{4a^2x^2y^2}{x^2+y^2}$.

**1.5.5** (1) $ay-a^2x-1=0$ を $a$ で微分して 0 とおくと $y=2ax$. これを最初の式に代入して整理すると $a^2x=1$. よって $\left(\frac{y}{2x}\right)^2x=1$ となり，整理して $y^2=4x$.

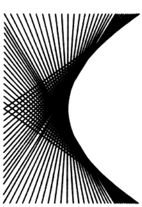
(2) 与式を $a$ で微分して，$-2(y-a)=1$ を得る．これより $x^2=a-\frac{1}{4}$, $y=a-\frac{1}{2}$. これから $a$ を消去して，$x^2=y+\frac{1}{4}$ を得る．これが包絡線の方程式.

(3) 与式を $a$ で微分して，$x-2a=0$. $x=2a$ を与式に代入すると，$y^2=a^2$. よって $y^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$. よって 2 直線 $x-2y=0$, $x+2y=0$ が包絡線.

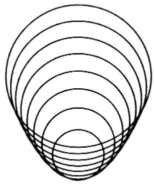
(4) 与式を $a$ で微分して，$y-a=0$. $y=a$ を与式に代入して整理すると，$x=0,1$. $x=0$ が包絡線，$x=1$ は特異点の軌跡.

(5) 与式を $a$ で微分して，$\frac{3}{2}(x-a^2)=0$. $x=a^2$ を与式に代入して整理すると，$y=a^3$. よって包絡線は $y^2=x^3$.

(1)



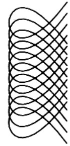
(2)



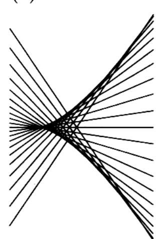
(3)



(4)

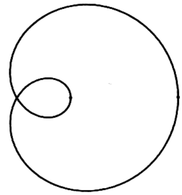


(5)



**1.6.1** $H_t'=(\sin s, (1-2t\sin^2 s)\cos s-4\cos s\sin^2 s)$ より，$\sin s=0$ ならば，$\cos s=\pm 1$ なので主張は従う.

**1.6.2** 例えば $\gamma(t)=(\cos 2t+\cos t, \sin 2t+\sin t)$ $(-\pi\leq t\leq\pi)$ とおくと，



$$\gamma' = (-2\sin 2t - \sin t, 2\cos 2t + \cos t)$$

$$\gamma'' = (-4\cos 2t - \cos t, -4\sin 2t + \sin t)$$

$\kappa = \dfrac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3} = \dfrac{9 + 6\cos t}{(5 + 4\cos t)^{3/2}}$ は極値をちょうど 2 個 ($t = 0, \pi$) もつので，頂点は 2 個 $\left(\dot{\kappa} = \dfrac{12(2 + \cos t)\sin t}{(5 + 4\sin t)^{5/2}}\text{に注意}\right)$.

$\gamma(2\pi/3) = \gamma(-2\pi/3)$ なので $\gamma$ は単純閉曲線ではない.

**1.6.3** まず雑な説明をする. $\frac{1}{2}\langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle ds$ は曲線の微小部分 $\gamma([s, s + ds])$ を底辺として原点を頂点とする 3 角形の面積であるので，題意が従う.

少しちゃんとした説明をしよう．まず，単純閉曲線が $\gamma_+(t) = (t, f_+(t))$ $(a \le t \le b)$ で表せる $C_+$ と $\gamma_-(t) = (t, f_-(t))$ $(a \le t \le b)$ で表せる $C_-$ の和集合で表されるとする．ここで $f_+(a) = f_-(a)$, $f_+(b) = f_-(b)$ である．このとき

$$ds = \frac{ds}{dt}dt = \mp|\dot{\gamma}_\pm|dt = \mp\sqrt{1 + (\dot{f}_\pm)^2}dt$$

となる. $\boldsymbol{e} = \mp\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{f}_\pm)^2}}(1, \dot{f}_\pm)$, $\boldsymbol{n}^\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{f}_\pm)^2}}(-\dot{f}_\pm, 1)$ なので,

$$\begin{aligned}
\int_0^l \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle ds &= \int_{C_-} \langle\gamma_-, \boldsymbol{n}_-\rangle ds + \int_{C_+} \langle\gamma_+, \boldsymbol{n}_+\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle\gamma_-, \boldsymbol{n}_-\rangle\sqrt{1 + (\dot{f}_-)^2}dt - \int_a^b \langle\gamma_+, \boldsymbol{n}_+\rangle\sqrt{1 + (\dot{f}_+)^2}dt \\
&= \int_a^b (-\dot{f}_- + 1)dt - \int_a^b (-\dot{f}_+ + 1)dt \\
&= \int_a^b (\dot{f}_+ - \dot{f}_-)dt = (\text{閉曲線 } \gamma \text{ の囲む図形の面積})
\end{aligned}$$

この論法はグラフ $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ の和で表される閉曲線に容易に拡張される.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ を定ベクトルとすれば,

$$\begin{aligned}
\int_0^l \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}\rangle ds &= \int_{C_-} \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_-\rangle ds + \int_{C_+} \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_+\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_-\rangle\sqrt{1 + (\dot{f}_-)^2}dt - \int_a^b \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_+\rangle\sqrt{1 + (\dot{f}_+)^2}dt \\
&= \int_a^b (-a_1\dot{f}_- + a_2)dt - \int_a^b (-a_1\dot{f}_+ + a_2)dt = 0
\end{aligned}$$

なので，$\gamma$ を $\boldsymbol{a} + \gamma$ に変えても積分値は変化しないことを表している.

**1.6.4** 円 $S^1$ 上に点 $A$, $B$ があるとし，この円の円弧で $A$ と $B$ を結ぶものは 2 つあるので，それらを $\alpha, \beta$ とする．$\alpha$ を長さ $l$ として，$\alpha$ を端点と長さを変えずに動かして得られる曲線を $C$ とし，$\beta$ と $C$ の囲む領域の面積の最大を考えればよい．等周不等式より面積最大となる $C$ は $\alpha$ で実現されるので証明された.

**1.6.5** $n = 0$ のときは単純閉曲線で $P$ を曲線上にとれば，公式を確認するのは容易．$n = 1$ のときは定理 1.6.17 の証明をなぞればよい.

**1.7.1** (1) $ds/dt = \sqrt{a^2\cosh 2t + b^2}$，フレネ・セレ枠は

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cosh 2t + b^2}}(a\sinh t, a\cosh t, b),$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2\cosh 2t}}(-b\sinh t, b\cosh t, -a),$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|*|}((a^2 + b^2)\cosh t, (b^2 - a^2)\sinh t, -2ab\cosh t\sinh t)$$

となり，曲率，捩率は $\kappa = \frac{a(a^2+b^2\cosh 2t)^{1/2}}{(b^2+a^2\cosh 2t)^{3/2}}$，$\tau = \frac{b}{a^2+b^2\cosh 2t}$ となる．
(2) $ds/dt = a^2 + t^2/2$ より $s = t^3/6 + a^2t + c$，フレネ・セレ枠は $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2/2}}(a^2, at, t^2/2)$，$\boldsymbol{b} = \frac{1}{a^2+t^2/2}(t^2/2, -at, a^2)$，$\boldsymbol{n} = \frac{1}{a^2+t^2/2}(-at, a^2 - t^2/2, at)$ となり，曲率，捩率は $\kappa = \frac{4a}{(2a^2+t^2)^2}$，$\tau = \frac{2a}{(2a^2+t^2)^2}$ となる．
(3) フレネ・セレ枠は $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2+a^2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, a)$，$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{4+2a^2}}(a(\sin t - \cos t), -a(\cos t + \sin t), 2)$，$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t, 0)$ となり，曲率，捩率は $\kappa = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{2+a^2}$，$\tau = \frac{ae^{-t}}{2+a^2}$ となる．
**1.7.2** まず $\boldsymbol{e}' = \langle \boldsymbol{e}', \gamma\rangle\gamma + \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}\rangle\boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{m}\rangle\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}' = \langle \boldsymbol{n}', \gamma\rangle\gamma + \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{e}\rangle\boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{m}\rangle\boldsymbol{m}$ に注意する．後は $\gamma' = \boldsymbol{e}$ と $\langle\gamma, \gamma\rangle = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\rangle = 1$，$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\rangle = 0$ を微分して得られる式 $0 = \langle \boldsymbol{e}', \gamma\rangle + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = \langle \boldsymbol{e}', \gamma\rangle + 1$，$\langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}\rangle = 0$，$\langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{m}\rangle + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}'\rangle = 0$，$\langle \boldsymbol{m}', \boldsymbol{m}\rangle = 0$ を見ればよい．

$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ を $\gamma$ のフレネ・セレ枠とすれば，$\gamma = \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle\boldsymbol{n} + \langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{b}$ と書けるので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} = \gamma' &= \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle'\boldsymbol{n} + \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle\boldsymbol{n}' + \langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle'\boldsymbol{b} + \langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{b}' \\ &= \langle\gamma, \boldsymbol{n}'\rangle\boldsymbol{n} + \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle(-\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}) + \langle\gamma, \boldsymbol{b}'\rangle\boldsymbol{b} + \langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle(-\tau\boldsymbol{n}) = -\kappa\langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

となり，$-1/\kappa = \langle\gamma, \boldsymbol{n}\rangle$ を得る．これを微分して，$-(1/\kappa)' = \langle\gamma, \boldsymbol{n}'\rangle = \tau\langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle$ なので，

$$\kappa_s = \langle \boldsymbol{e}', \gamma \times \boldsymbol{e}\rangle = \kappa\langle \boldsymbol{n}, \gamma \times \boldsymbol{e}\rangle = \kappa\langle\gamma, \boldsymbol{b}\rangle = -\frac{\kappa}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

**1.7.3** $|\gamma - \boldsymbol{a}|$ が定数であれば，$\frac{1}{2}(|\gamma - \boldsymbol{a}|^2)' = \langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle$，$\frac{1}{2}(|\gamma - \boldsymbol{a}|^2)'' = 1 + \kappa\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}\rangle$ は 0 で，$1/\kappa = -\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}\rangle$ をさらに微分すれば，$(1/\kappa)' = -\kappa\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle + \tau\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ であるが，$\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle = 0$ より，$\frac{1}{\tau}(\frac{1}{\kappa})' = -\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ を得る．これをさらに微分すると $\left(\frac{1}{\tau}(\frac{1}{\kappa})'\right)' = \tau\langle\gamma - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}\rangle = -\frac{\tau}{\kappa}$ を得るので，所与の条件が従う．

逆に，式 (1.7.4) を仮定すると，

$$\left[\gamma + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{b}\right]' = \boldsymbol{e} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{n} + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}' + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'\boldsymbol{b} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{b}'$$

は 0 であるので，$\gamma + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} + \frac{1}{\tau}(\frac{1}{\kappa})'\boldsymbol{b}$ は定点．この定点を $\boldsymbol{a}$ とすると，

$$\frac{1}{2}(|\gamma - \boldsymbol{a}|^2)' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)^2\right]' = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}\right)' + \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0$$

よって $|\gamma - \boldsymbol{a}|$ は定数である．
**1.7.4** 定傾曲線では $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w}\rangle$ が定数なので，弧長変数で微分して

$$0 = \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{w}\rangle = \kappa\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}\rangle$$

であり，$\kappa > 0$ より $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$．さらに弧長変数で微分して次を得る．

$$0 = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{w} \rangle = \langle -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle = -\kappa \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w} \rangle + \tau \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle$$

これより $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle}$ であるが，次よりこれは定数であることがわかる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' &= \frac{\langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle - \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle^2} \\ &= \frac{(\kappa \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle - \tau \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w} \rangle) \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \rangle^2} = 0\end{aligned}$$

逆に，$\tau/\kappa$ が定数であれば，$\boldsymbol{w} = \frac{\tau}{\kappa} \boldsymbol{e} + \boldsymbol{n}$ とおくと，

$$\boldsymbol{w}' = \frac{\tau}{\kappa} \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{b}' = \frac{\tau}{\kappa} \kappa \boldsymbol{n} - \tau \boldsymbol{e} = 0$$

なので $\boldsymbol{w}$ は定ベクトル．

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle' = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}' \rangle = \left\langle \frac{\tau}{\kappa} \boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}, \kappa \boldsymbol{n} \right\rangle = 0$$

なので，$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle$ は定数であり，定傾曲線であることがわかる．

**1.7.5** (1) $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ を $\gamma$ のフレネ・セレ枠とし，$\gamma$ の弧長 $s$ による微分を $'$ で表す．$\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n} \rangle \boldsymbol{n} + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{b}$ なので

$$\begin{aligned}\sigma' &= |\alpha'| = |\boldsymbol{e} - \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{w}| = |(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2) \boldsymbol{e} - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n} \rangle \boldsymbol{n} - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{b}| \\ &= \left((1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)^2 + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2 (\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n} \rangle^2 + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle^2)\right)^{1/2} = (1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)^{1/2}\end{aligned}$$

であり，これは $\sin \theta$ に等しい．

(2) $\boldsymbol{T} = \alpha'/|\alpha'|$ とおくと，$\boldsymbol{T}$, $\frac{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}|}$ が $\alpha$ のフレネ枠なので，$\alpha$ の弧長 $\sigma$ に対し $\frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma} = K \frac{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}|}$ を満たす $K$ が求める $\alpha$ の曲率である．次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma} &= \frac{\boldsymbol{T}'}{|\alpha'|} = \frac{(\alpha'/|\alpha'|)'}{|\alpha'|} = \frac{\alpha''|\alpha'| - \alpha'|\alpha'|'}{|\alpha'|^3} \\ &= \frac{\boldsymbol{e}' - \langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{w}}{(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)} + \alpha' \frac{|\alpha'|'}{|\alpha'|^3} = \frac{\kappa(\boldsymbol{n} - \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{w})}{(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)^{1/2}} + \alpha' \frac{|\alpha'|'}{|\alpha'|^3}\end{aligned}$$

$\alpha'$ が $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{w}$ の 1 次結合であることと $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{e}/|\alpha'|$ より次を得る．

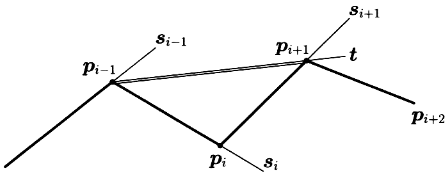
$$\begin{aligned}K &= \left\langle \frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma}, \frac{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{T}|} \right\rangle = \kappa \left\langle \frac{\boldsymbol{n} - \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{w}}{(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)}, \frac{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{e}|} \right\rangle \\ &= \frac{\kappa \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle}{(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)(\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n} \rangle^2 + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\kappa \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle}{(1 - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e} \rangle^2)^{3/2}} = \frac{\kappa \cos \phi}{\sin^3 \theta}\end{aligned}$$

**1.7.6** 1 点 $P$ に 3 本の線分 $PA$, $PB$, $PC$ が会すとき，

$$\angle(PA, PC) \leq \angle(PA, PB) + \angle(PB, PC)$$

これは $S^2$ の 3 点 $\frac{\overrightarrow{PA}}{PA}$, $\frac{\overrightarrow{PB}}{PB}$, $\frac{\overrightarrow{PC}}{PC}$ の距離のなす 3 角不等式である．これより次を得る．

$$\begin{aligned}
&K(P)-K(P')\\
&=\angle(\boldsymbol{s}_{i-1}-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1})+\angle(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\\
&\quad+\angle(\boldsymbol{s}_{i+1}-\boldsymbol{p}_{i+1},\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_{i+1})\\
&\quad-\angle(\boldsymbol{s}_{i-1}-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_{i-1})-\angle(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{p}_{i+1},\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_{i+1})\\
&\geq-\angle(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1},\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_{i-1})+\angle(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\\
&\quad-\angle(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{p}_{i+1},\boldsymbol{s}_{i+1}-\boldsymbol{p}_{i+1})\\
&=0
\end{aligned}$$




**2.1.1** いずれも定義式に代入して，確かめればよい．幾つかコメントしておく．

- 3 軸楕円面は $u$ についても $v$ についても周期的で，その周期は $2\pi$ である．$\cos u=0$ なる点の像は，$(0,0,\pm b)$．
- 一葉双曲面，二葉双曲面は共に $u$ について周期的．
- 2 次錐面は $u$ について周期的で，直線 $v=0$ の像は原点である．

**2.1.2** 回転トーラス $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+b^2z^2=b^2$ を展開して移項すると，

$$x^2+y^2+a^2+b^2z^2-b^2=2a\sqrt{x^2+y^2} \tag{A.2}$$

両辺を 2 乗すると，$(x^2+y^2+a^2+b^2z^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$ を得る．式 (A.2) で左辺の符号を変えたものは $a$ の符号を変えたものに相当するので，同じトーラスを定める．よって回転トーラスは 4 次曲面である．

点 $\boldsymbol{a}$ を通り，方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ をもつ直線 $l$ は $t\mapsto\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$ で表される．代数曲面 $S$ はある多項式 $f(x,y,z)$ の零点集合なので，$S$ に含まれない直線 $l$ は $S$ と有限個の点で交わる．実際，直線 $l$ との交点の個数は $t$ の多項式 $f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})$ の零点の個数であり，有限個である．常螺旋面は $z$ 軸と平行な直線と無限回交わるので，代数曲面でない．

メビウスの帯は $(u,v)$ の定義域を $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ にとると代数曲面になる．以下，それを説明しよう．$(x,y)=(2+z\cot\frac{u}{2})(\cos u,\sin u)$ なので，

$$x\sin\frac{u}{2}=\left(2\sin\frac{u}{2}+z\cos\frac{u}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{u}{2}-1\right),\qquad y=4\cos\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2}+2z\cos^2\frac{u}{2}$$

であるが，第 2 式を $\sin\frac{u}{2}$ について解いて第 1 式に代入して得られる式を整理すると，$\cos^2\frac{u}{2}=\frac{y(x+2)}{2(xz+2y)}$ を得る．$\cos\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{(2+x)y}{2(xz+2y)}}$ を第 2 式に代入して整理すると，$\sin^2\frac{u}{2}=-\frac{y(y-z)^2}{2(x+2)(xz+2y)}$ を得る．これは第 1 式も満たす．よって

$$1=\cos^2\frac{u}{2}+\sin^2\frac{u}{2}=\frac{y(x+2)}{2(xz+2y)}-\frac{y(y-z)^2}{2(x+2)(xz+2y)}$$

分母を払って $2(x+2)(xz+2y)=y[(x+2)^2-(y-z)^2]$ を得る．この式が定義する曲面

の特異点集合は $\{(-2,t,t): t \in \mathbb{R}\}$ である．

ホイットニーの傘（例 2.1.9）は $x^2 = y^2 z$ が定義式だが，この式で定まる集合は $z$ 軸を含む．しかしながら，$z$ 軸の下半分は径数表示を与える写像の像にはならない．

**2.1.3** 一葉双曲面，2 次錐面はそれぞれ次のような線織面の表示をもつ．

$$(t,\theta) \mapsto (a\cos\theta, b\sin\theta, 0) \pm t(-a\sin\theta, b\cos\theta, c)$$
$$(t,\theta) \mapsto t(a\cos\theta, b\sin\theta, c)$$

柱面は $z$ を定義式に含まないので線織面である．他は線織面でない．楕円面は有界なので直線を含まない．二葉双曲面が直線 $l$ を含むとして矛盾を導く．二葉双曲面は平面 $z=0$ と交わらないので，$l$ と平面 $z=0$ は平行である．ところが二葉双曲面と平面 $z=k$ の切り口は双曲線なので矛盾．放物面が直線を含むとすると，その $xy$ 平面への正射影も直線．これを $(x,y)=(a,b)+(p,q)t$ と書いておく．ところが $xy$ 平面への正射影は全単射だから，この直線の曲面への持ち上げは $z$ 成分に必ず 2 次の項を含む．

**2.1.4** 常螺旋面，メビウスの帯は共に $v$ について 1 次式，ホイットニーの傘は $u$ について 1 次式なので線織面である．

**2.2.1** $4\pi^2 ab$

**2.2.2** 式 (2.1.1) で $I = ds^2 + x^2 d\theta$ より，面積要素は $dA = x\,ds\,d\theta$．よって表面積は

$$\int_a^b ds \int_0^{2\pi} x\,d\theta = \int_a^b x\,ds \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_a^b x\,ds$$

**2.2.3** $\boldsymbol{x}_s = (1 - r\kappa\cos\theta)\boldsymbol{e} - r\tau\sin\theta\boldsymbol{\nu} + r\tau\cos\theta\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}_\theta = r(-\sin\theta\boldsymbol{\nu} + \cos\theta\boldsymbol{b})$ なので，$\mathrm{I} = \big((1-r\kappa\cos\theta)^2 + r^2\tau^2\big)ds^2 + 2r^2\tau\,ds\,d\theta + r^2 d\theta^2$ となり，面積要素は $dA = r|1-r\kappa\cos\theta|ds\,d\theta$ となる．よって表面積は次で与えられる．

$$\int_{I\times S^1} dA = \int_{I\times S^1} r|1-r\kappa\cos\theta|ds\,d\theta = 2\pi r \quad (\gamma\ \text{の弧長})$$

**2.2.4** 接ベクトルを $(a_1,b_1)$, $(a_2,b_2)$ で表すと，$k(P\,du^2 + 2Q du\,dv + R\,dv^2) = (b_1 du - a_1 dv)(b_2 du - a_2 dv)$ なので，$b_1 b_2 = kP$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = -2kQ$, $a_1 a_2 = kR$ を得る．$(a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 = k^2(4Q^2 - 2PR)$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{E\,a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G\,b_1 b_2}{(E\,(a_1)^2 + 2F\,a_1 b_1 + G\,b_1^2)^{1/2}(E\,(a_2)^2 + 2F\,a_2 b_2 + G\,b_2^2)^{1/2}} \\
&= \frac{E\,a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G\,b_1 b_2}{\begin{pmatrix} E^2\,(a_1 a_2)^2 + 4F^2(a_1 a_2 b_1 b_2) + G(b_1 b_2)^2 \\ +EG((a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2) \\ 2EFa_1 a_2(a_1 b_2 + a_2 b_1) + 2FGb_1 b_2(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{pmatrix}^{1/2}} \\
&= \frac{ER - 2FQ + GP}{(E^2R^2 + 4F^2PR + G^2P^2 + 2EG(2Q^2 - PR) - 4EFRQ - 4FGPQ)^{1/2}} \\
&= \frac{ER - 2FQ + GP}{((ER - 2FQ + GP)^2 + 4(EG - F^2)(Q^2 - PR))^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\sin\theta = (1 - \cos^2\theta)^{1/2} = \frac{2(EG - F^2)(Q^2 - PR)}{((ER - 2FQ + GP)^2 + 4(EG - F^2)(Q^2 - PR))^{1/2}}$$

なので，結果を得る．

**2.3.1** 適当な $z$ 軸の周りの回転を合成して $\boldsymbol{v}$ が $(1,0,0)$ としてよい．つまり $(du_2, dv_2) = (1,0)$ としてよい．このとき共役方向は $(-b,a)$ で表される．考える正射影は $(x,y,z) \mapsto (y,z)$ であるから，これを曲面に制限すると，$(u,v) \mapsto (v, \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + cv^2) +$ 3 次以上の項$)$ となる．この写像の原点でのヤコビ行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ au+bv+\cdots & bu+cv+\cdots \end{pmatrix}$ であり，臨界点集合の接方向は $(-b,a)$ で表される．臨界点集合の像が輪郭を表すので，共役方向の像が輪郭の接方向を実現することがわかる．

**2.3.2** 補題 2.3.1 に代入して整理すればよい．

**2.3.3** $\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$ より，$\langle \boldsymbol{x}_{uu}, \boldsymbol{\nu} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_u \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_{uv}, \boldsymbol{\nu} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_v \rangle = -\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_u \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_v \rangle$ である．$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{x}_u + b\boldsymbol{x}_v$ と書いたとき，$\mathcal{S}(\boldsymbol{v}) = -a\boldsymbol{\nu}_u - b\boldsymbol{\nu}_v$ となる．$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_u) = -\boldsymbol{\nu}_u$, $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_v) = -\boldsymbol{\nu}_v$ でワインガルテンの公式より，基底 $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ についての表現行列は $\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} GL-FM & EM-FL \\ GM-FN & EN-FM \end{pmatrix}$ で，この固有多項式は $t^2 - 2Ht + K$ である．

**2.3.4**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}_u \cdot \boldsymbol{\nu}_u &= \frac{E(GL-FM)^2 + 2F(EM-GL)(FL-ME) + G(FL-ME)^2}{(EG-F^2)^2} \\
&= \frac{L^2G - 2LMF + M^2E}{EG-F^2} = 2HL - KE \\
\boldsymbol{\nu}_u \cdot \boldsymbol{\nu}_v &= \frac{GLM + FMN - FM^2 - FLN}{EG-F^2} = 2HM - KF \\
\boldsymbol{\nu}_v \cdot \boldsymbol{\nu}_v &= \frac{EN^2 - FMN - GM^2}{EG-F^2} = 2HN - KG
\end{aligned}$$

なので $d\boldsymbol{\nu} \cdot d\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_u du + \boldsymbol{\nu}_v dv) \cdot (\boldsymbol{\nu}_u du + \boldsymbol{\nu}_v dv) = 2H\mathrm{II} - K\mathrm{I}$.

**2.4.1** $\boldsymbol{n}_g$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ はどれも $\boldsymbol{e}$ に直交するので同一平面上にある．$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{n}_g$ と $\boldsymbol{\nu}$ はそれぞれ直交するので，$\boldsymbol{\nu}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角度，および $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}_g$ のなす角度はどちらも $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ であり，$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{b} = \sin\vartheta = \boldsymbol{n}_g \cdot \boldsymbol{n}$ である．$\cos\vartheta = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n}$ を $s$ で微分すると，

$$\begin{aligned}
-\vartheta' \sin\vartheta = \boldsymbol{\nu}' \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\xi}' &= (-\kappa_n \boldsymbol{e} - \tau_g \boldsymbol{n}_g) \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\nu} \cdot (-\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{\eta}) \\
&= -\tau_g \boldsymbol{n}_g \cdot \boldsymbol{\xi} + \tau \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta} = (-\tau_g + \tau)\sin\vartheta
\end{aligned}$$

なので $\tau_g = \tau + \vartheta'$.

**2.4.2** 式 (2.1.1) で $\boldsymbol{x}_s$, $\boldsymbol{x}_\theta$ の外積を計算すれば，

$$\boldsymbol{x}_s \times \boldsymbol{x}_\theta = x(-z'\cos\theta, -z'\sin\theta, x')$$

なので，$\boldsymbol{\nu} = (-z'\cos\theta, -z'\sin\theta, x')$ を得る．

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_s dx + \boldsymbol{x}_\theta d\theta) \cdot (\boldsymbol{x}_s dx + \boldsymbol{x}_\theta d\theta) = ds^2 + x^2 d\theta^2$$

単位法ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を微分すると，

$$\boldsymbol{\nu}_s = (-z''\cos\theta,\ -z''\sin\theta,\ x''), \qquad \boldsymbol{\nu}_\theta = (z'\sin\theta,\ -z'\cos\theta,\ 0)$$

なので，第 2 基本形式の表示式を得る．

$$\mathrm{II} = -d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\nu} = -(\boldsymbol{x}_s ds + \boldsymbol{x}_\theta d\theta)\cdot(\boldsymbol{\nu}_s ds + \boldsymbol{\nu}_\theta d\theta) = \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} ds^2 + xz' d\theta^2$$

よって主曲率 $\lambda$ の満たす式は

$$\begin{vmatrix} x'z'' - x''z' - \lambda & 0 \\ 0 & xz' - \lambda x^2 \end{vmatrix} = x(z' - \lambda x)(x'z'' - x''z' - \lambda) = 0$$

であり，$\lambda_1 = z'/x$, $\lambda_2 = x'z'' - x''z'$ を得る．$s$ が弧長変数なので $(x')^2 + (z')^2 = 1$ であり，$x'x'' + z'z'' = 0$ なので

$$\lambda_2 = x'z'' - x''z' = -x'\frac{x'x''}{z'} - x''z' = -(1 - (z')^2)\frac{x''}{z'} - x''z' = -\frac{x''}{z'}$$

主方向はそれぞれ $\partial_\theta$, $\partial_s$ となる．

**2.4.3** ガウス曲率 $K = \lambda_1\lambda_2 = -x''/x$ が定数であるような回転面を決定するために，$K$ を定数とし，常微分方程式 $\frac{x''}{x} = -K$ を解く．

$K = 0$ のとき，$x = as + b$ ($a, b$ は定数) で $z' = \sqrt{1 - (x')^2} = \sqrt{1 - a^2}$ より，$z = s\sqrt{1 - a^2} + c$ ($c$ は定数)．$(x, 0, z) = (as + b, 0, s\sqrt{1 - a^2} + c)$ で特に，$a = 0$ のときは円柱面，$0 < |a| < 1$ のときは円錐面，$|a| = 1$ のときは平面を得る．

$K = c^2 > 0$ のとき，$x = a\cos(cs + b)$ ($a, b$ は定数) で $s$ を取り替えて $b = 0$ と仮定できて，$z' = \sqrt{1 - (x')^2} = \sqrt{1 - a^2c^2\sin^2 cs}$ となり，$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - a^2c^2\sin^2 ct}\, dt + C$ ($C$ は定数) を得る．特に $ac = 1$, $C = 0$ のときは球面となる．

$K = -c^2 < 0$ のとき，$x = ae^{cs} + be^{-cs}$ ($a, b$ は定数) で $z' = \sqrt{1 - (x')^2} = \sqrt{1 - c^2(ae^{cs} - be^{-cs})^2}$ となるので $z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - c^2(ae^{ct} - be^{-ct})^2}\, dt + C$ ($C$ は定数) を得る．

**2.4.4** $\boldsymbol{x}_u = (f'\cos\theta, f'\sin\theta, 1)$, $\boldsymbol{x}_\theta = (-f\sin\theta, f\cos\theta, 0)$ より，

$$E = (f')^2 + 1, \quad F = 0, \quad G = f^2, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{(-\cos\theta, -\sin\theta, f')}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

$\boldsymbol{x}_{uu} = f''(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\boldsymbol{x}_{u\theta} = f'(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, $\boldsymbol{x}_{\theta\theta} = -f(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ より，$L = -\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}}$, $M = 0$, $N = \frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}}$ となり，

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{1 + (f')^2 - ff''}{2f(1 + (f')^2)^{3/2}}$$

**2.4.5** $\gamma(s)$ のフレネ・セレ枠 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて計算する．第 1 基本形式は

$$I = [(1 - r\kappa\cos\theta)^2 + r^2\tau^2]ds^2 + r^2\tau\, ds\, d\theta + r^2 d\theta^2$$

$\boldsymbol{\nu} = \varepsilon(\cos\theta\boldsymbol{n} + \sin\theta\boldsymbol{b})$ (ただし $\varepsilon$ は $r\kappa\cos\theta - 1$ の符号)．第 2 基本形式は

$$II = \varepsilon[\kappa\cos\theta(r\kappa\cos\theta - 1) + r\tau^2]ds^2 + r\tau\, ds\, d\theta + r\, d\theta^2$$

であり，$\lambda = \varepsilon/r$, $\lambda_2 = \varepsilon\kappa\cos\theta/(r\kappa\cos\theta - 1)$．対応する主方向はそれぞれ $\partial_\theta$, $\partial_s - \tau\partial_\theta$ で生成される．

**2.4.6** 
$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}' &= a'(s)\boldsymbol{x}_u + b'(s)\boldsymbol{x}_v + a(s)(u'\boldsymbol{x}_{uu} + v'\boldsymbol{x}_{uv}) + b(s)(u'\boldsymbol{x}_{uv} + v'\boldsymbol{x}_{vv}) \\ &= (a'(s) + a(s)u'\Gamma^u_{uu} + (a(s)v' + b(s)u')\Gamma^u_{uv} + b(s)v'\Gamma^u_{vv})\boldsymbol{x}_u \\ &\quad +(b'(s) + a(s)u'\Gamma^v_{uu} + (a(s)v' + b(s)u')\Gamma^v_{uv} + b(s)v'\Gamma^v_{vv})\boldsymbol{x}_v \\ &\quad +(a(s)u'L + (a(s)v' + b(s)u')M + b(s)v'N)\boldsymbol{\nu}\end{aligned}$$

の $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ の係数が 0 である条件を見ればよい．

**2.4.7** $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{w}$ とおけば，$\boldsymbol{w}_1 = \cos\phi(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{v}) + \sin\phi(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_1) = \cos\phi\boldsymbol{v}_1 - \sin\phi\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{w}' = (\cos\phi\boldsymbol{v} + \sin\phi\boldsymbol{v}_1)' = -(\sin\phi)\phi'\boldsymbol{v} + (\cos\phi)\boldsymbol{v}' + (\cos\phi)\phi'\boldsymbol{v}_1 + (\sin\phi)\boldsymbol{v}_1'$$

より，$\langle\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_1\rangle + \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1'\rangle = \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1\rangle' = 0$ を勘案すれば

$$\langle\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w}_1\rangle = (\sin^2\phi)\phi' + \cos^2\phi\langle\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_1\rangle + (\cos^2\phi)\phi' - \sin^2\phi\langle\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}\rangle = \phi' + \langle\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_1\rangle$$

を得るので $\kappa_{\boldsymbol{w}} - \kappa_{\boldsymbol{v}} = \phi'$ を帰結する．$\boldsymbol{v}$ が $\alpha(s)$ に沿って平行移動であるとき $\kappa_{\boldsymbol{v}} = 0$ で，さらに $\boldsymbol{w} = \alpha'(s)$ とおけば，$\kappa_g = \kappa_{\alpha'} = \kappa_{\alpha'} - \kappa_{\boldsymbol{v}} = \phi'$ を得る．

**2.4.8** $\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle' = \langle\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'\rangle = 0$ より明らか．

**2.5.1** 定理 2.5.1 で $F = 0$ として整理すればよい．

**2.5.2** 等長変換 $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ があったとする．ガウス曲率はそれぞれ $-1/(1 + u^2)^2$, $-1/(1 + \bar{u}^2)^2$ なので，ガウス曲率が等しいことより $\bar{u} = \pm u$. よって $d\bar{u} = \pm du$. 第 1 基本形式はそれぞれ，

$$\begin{aligned} I &= -\cos v\, du^2 - 2\sin v\, du\, dv + u\, dv^2, \\ \bar{I} &= -\bar{u}\cos\bar{v}\, d\bar{u}^2 - 2\bar{u}\sin\bar{v}\, d\bar{u}\, d\bar{v} + d\bar{v}^2\end{aligned}$$

なので，$d\bar{v} = \bar{v}_u du + \bar{v}_v dv$ を代入して $I = \bar{I}$ とおいて $dv^2$ の係数を比較すると $(\bar{v}_v)^2 = u$ を得るが，これは矛盾．

**2.6.1** $\langle(\boldsymbol{e}_1)_u, \boldsymbol{e}_2\rangle = \langle(\frac{\boldsymbol{x}_u}{\sqrt{E}})_u, \frac{\boldsymbol{x}_v}{\sqrt{G}}\rangle = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$, $\langle(\boldsymbol{e}_1)_v, \boldsymbol{e}_2\rangle = \langle(\frac{\boldsymbol{x}_u}{\sqrt{E}})_v, \frac{\boldsymbol{x}_v}{\sqrt{G}}\rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$ なので $\kappa_{\boldsymbol{e}_1} = \langle\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2\rangle = \langle(\boldsymbol{e}_1)_u, \boldsymbol{e}_2\rangle u' + \langle(\boldsymbol{e}_1)_v, \boldsymbol{e}_2\rangle v' = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(G_u v' - E_v u')$ である．式 (2.4.10) より $\kappa_{\boldsymbol{w}} - \kappa_{\boldsymbol{e}_1} = \phi'$ となり証明を終わる．

**2.6.2** 次式より証明を終わる．

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\kappa_{\boldsymbol{w}} ds &= \int_{\partial D}\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big(G_u\frac{dv}{ds} - E_v\frac{du}{ds}\Big)ds + \int_{\partial D}\frac{d\phi}{ds}ds \quad (\text{式 (2.6.5) より}) \\ &= \iint_D\Big[\Big(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\Big)_v + \Big(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\Big)_u\Big]du\, dv + \int_{\partial D}\frac{d\phi}{ds}ds \quad (\text{グリーンの定理}) \\ &= -\iint_D K\sqrt{EG}\, du\, dv + \int_0^l\frac{d\phi}{ds}ds \quad (\text{式 (2.5.7) より}) \\ &= -\iint_D K\, dA + \phi(l) - \phi(0) \quad (dA = \sqrt{EG}\, du\, dv \text{ より})\end{aligned}$$

**2.6.3** $\alpha : [0, l] \to \boldsymbol{x}(U)$ が $\partial D$ を正の向きに径数付けるとする．$\boldsymbol{w} = \alpha'$ として前問の計算を適用する．$\phi$ が連続だとすると $\phi(l) - \phi(0) = 2\pi$ である．実際には $\phi$ は有限個の点で不連続で，不連続点では $\beta_i$ ジャンプするので結果を得る．

**2.6.4** (1) $\angle A : \pi =$ (求める面積) : (半球の表面積) より従う．

(2) 点 $A$, $B$, $C$ の対蹠点を $A'$, $B'$, $C'$ で表すと，(1) より，$\triangle ABC + \triangle AB'C' = 2r^2\angle A$, $\triangle ABC + \triangle AB'C = 2r^2\angle B$, $\triangle ABC + \triangle ABC' = 2r^2\angle C$ が成り立つ．これ

らを足し合わせると，$3\triangle ABC+\triangle AB'C'+\triangle AB'C+\triangle ABC' = 2r^2(\angle A+\angle B+\angle C)$ を得るが，左辺は $2\triangle ABC + 2\pi r^2$ なので，整理すれば証明が終わる．

**2.6.5** $\sum_v a_v =$ 各面の内角の和 $= 2\pi(E-F)$ なので

$$\sum_v k_v = 2\pi(V-E-F) = 2\pi\chi(P)$$

**2.7.1** $(u,v)$ を曲率線座標として，$\boldsymbol{e}$ が曲率線となす角を $\varphi$ とすると，$u' = \cos\varphi$, $v' = \sin\varphi$ であり，$\boldsymbol{e} = \cos\varphi\,\boldsymbol{x}_u + \sin\varphi\,\boldsymbol{x}_v$ と書くとき $\boldsymbol{n}_g = -\sin\varphi\boldsymbol{x}_u + \cos\varphi\boldsymbol{x}_v$ を示せ．

$$\begin{aligned}\tau_g &= \boldsymbol{n}_g'\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{n}_g\cdot\boldsymbol{\nu}' \qquad (\boldsymbol{n}_g\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ より})\\ &= \boldsymbol{n}_g\cdot(\boldsymbol{\nu}_u u' + \boldsymbol{\nu}_v v')\\ &= -\boldsymbol{n}_g\cdot(\lambda_1 u'\boldsymbol{x}_u + \lambda_2 v'\boldsymbol{x}_v) \qquad ((u,v) \text{ が曲率線座標なので})\\ &= (-\sin\varphi\boldsymbol{x}_u + \cos\varphi\boldsymbol{x}_v)\cdot(\lambda_1\boldsymbol{x}_u\cos\varphi + \lambda_2\boldsymbol{x}_v\sin\varphi)\\ &= (\lambda_2-\lambda_1)\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

**2.7.2** $u = u(t)$ を $t$ の関数 $\boldsymbol{\beta} = \alpha(t) + u\boldsymbol{w}$ として，$\langle\beta'(t), \boldsymbol{w}'(t)\rangle = 0$ を解けばよい．

**2.7.3** (1) $\langle\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w}\rangle = 0$, $\langle\boldsymbol{w}', \beta'\rangle = 0$ より，$\boldsymbol{w}'$ は $\boldsymbol{w}$, $\beta'$ に直交している．外積 $\beta'\times\boldsymbol{w}$ も $\boldsymbol{w}$, $\beta'$ に直交しているので $\beta'\times\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}'$ を満たす関数 $\lambda = \lambda(t)$ が存在する．特に $\lambda = \langle\beta'\times\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'\rangle/|\boldsymbol{w}'|^2$ である．

(2) $\boldsymbol{x}_t = \beta' + u\boldsymbol{w}'$, $\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{w}$ より $\boldsymbol{x}_t\times\boldsymbol{x}_u = \beta'\times\boldsymbol{w} + u(\boldsymbol{w}'\times\boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{w}' + u|\boldsymbol{w}'|\frac{\boldsymbol{w}'\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}'\times\boldsymbol{w}|}$ となる．$|\boldsymbol{x}_t\times\boldsymbol{x}_u|^2 = |\lambda\boldsymbol{w}' + u(\boldsymbol{w}'\times\boldsymbol{w})|^2 = (\lambda^2+u^2)|\boldsymbol{w}'|^2$ より，$\boldsymbol{x}$ の特異点軌跡は $\lambda = u = 0$ であることがわかる．

(3) $\boldsymbol{x}_{tt} = \beta'' + u\boldsymbol{w}''$, $\boldsymbol{x}_{tu} = \boldsymbol{w}'$, $\boldsymbol{x}_{uu} = 0$ より $M = \langle\boldsymbol{x}_{tu}, \boldsymbol{\nu}\rangle = \lambda\langle\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w}'\rangle/\sqrt{\lambda^2+u^2}|\boldsymbol{w}'| = \lambda|\boldsymbol{w}'|/\sqrt{\lambda^2+u^2}$, $N = 0$ となり，$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+u^2)^2}$．

**2.7.4** $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}'$, $\alpha'$ が常に 1 次従属なので，$\langle\boldsymbol{w}', \alpha'\times\boldsymbol{w}\rangle$ が恒等的に 0 となり $\lambda = 0$．よって $K = 0$ であり可展面である．

**3.3.1** $K \neq 0$ なので双曲的である．定理 2.7.6 を用いる．

**3.3.2** 曲面の径数表示 $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ があるとき，$\boldsymbol{x}(D)$ 上の微小長方形 $\boldsymbol{x}([u, u+du]\times[v, v+dv])$ を底面として原点を頂点とする錐体の体積は $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle dA$ で与えられるので，$\boldsymbol{x}(D)$ を底面として原点を頂点とする錐体の体積は次で与えられる．

$$V_D(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\iint_D \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle dA$$

$S_+ = \{(u,v,f^+(u,v)) \mid (u,v)\in D\}$, $S_- = \{(u,v,f^-(u,v)) \mid (u,v)\in D\}$ とおいて $S = S_+\cup S_-$, $f^+|_{\partial D} = f^-|_{\partial D}$. $\boldsymbol{x}^\pm(u,v) = (u,v,f^\pm(u,v))$ とすると $\boldsymbol{x}_u^\pm = (1,0,f_u^\pm)$, $\boldsymbol{x}_v^\pm = (1,0,f_v^\pm)$ で $\boldsymbol{x}_u^\pm\times\boldsymbol{x}_v^\pm = (-f_v^\pm, -f_u^\pm, 1)$.

$$\begin{aligned}\iint_D\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_u^+\times\boldsymbol{x}_v^+\rangle du\,dv &= \iint_D(-a_1f_v^+ - a_2f_u^+ + a_3)du\,dv\\ &= \iint_D a_3du\,dv - \int_{\partial D}(a_1f^+\,du - a_2f^+\,dv) \qquad \text{(A.3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_v^-\times\boldsymbol{x}_u^-\rangle du\,dv &= \iint_D(-a_1f_v^- - a_2f_u^- + a_3)du\,dv\\ &= \iint_D a_3du\,dv - \int_{\partial D}(a_1f^-\,du - a_2f^-\,dv) \qquad \text{(A.4)}\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{a}$ が何処にあっても $\iint_S \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle dA = (\mathrm{A}.3) - (\mathrm{A}.4) = 0.$

$$\begin{aligned} \iint_D \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u^+ \times \boldsymbol{x}_v^+ \rangle du\,dv &= \iint_D (-u(f^+)_v - v(f^+)_u + f^+(u,v))du\,dv \\ &= \iint_D f^+ du\,dv + \int_{\partial D} (uf^+\,du - vf^+\,dv) \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_v^- \times \boldsymbol{x}_u^- \rangle du\,dv &= \iint_D (-u(f^-)_v - v(f^-)_u + f^-(u,v))du\,dv \\ &= \iint_D f^- du\,dv + \int_{\partial D} (uf^-\,du - vf^-\,dv) \end{aligned} \tag{A.6}$$

よって

$$\iint_S \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle dA = (\mathrm{A}.5) - (\mathrm{A}.6) = \iint_D (f^+ - f^-)du\,dv$$

**3.3.3** 補題 3.3.1 の証明で行った計算を続けて $t^2$ の項の係数を決定すればよい．

$$\begin{aligned} E^t &= E + 2th\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_u \rangle + t^2(h^2\langle \boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_u \rangle + h_u^2) + O(t^3) \\ &= E - 2thL + t^2(h^2(2HL - KE) + h_u^2) + O(t^3) \\ F^t &= F + th(\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{\nu}_v \rangle + \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_u \rangle) + t^2(h^2\langle \boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v \rangle + h_u h_v) + O(t^3) \\ &= F - 2thM + t^2(h^2(2HM - KF) + h_u h_v) + O(t^3) \\ G^t &= G + 2th\langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}_v \rangle + t^2(h^2\langle \boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_u \rangle + h_u^2) + O(t^3) \\ &= G - 2thNL + t^2(h^2(2HN - KG) + h_v^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

なので，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 = EG - F^2(1 - 4thH) + t^2\bigl(&2H(LG - 2FM + NE) \\ &-2K(EG - F^2) + 4(LN - M^2) + Nh_u^2 - 2Mh_uh_v + Lh_v^2\bigr) \\ = (EG - F^2)&(1 - 4thH + t^2h^2(4H^2 + 2K + |\nabla h|^2)) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\sqrt{E^tG^t - (F^t)^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2}\left(1 - 2thH + t^2h^2\left(2H^2 + K + \frac{|\nabla h|^2}{2}\right) - 2t^2h^2H^2\right) + o(t^3) \\ &= \sqrt{EG - F^2}\left(1 - 2thH + t^2h^2\left(K + \frac{|\nabla h|^2}{2}\right)\right) + o(t^3) \end{aligned}$$

**3.3.4** $V(t)$ の $t^2$ の係数の被積分関数は次で与えられる．

$$\langle \boldsymbol{x}, (h\boldsymbol{\nu})_u \times (h\boldsymbol{\nu})_v \rangle + \langle h\boldsymbol{\nu}, (h\boldsymbol{\nu})_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle + \langle h\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times (h\boldsymbol{x})_v \rangle$$

第 1 項は次のように変形される．

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{x}, (h\boldsymbol{\nu})_u \times (h\boldsymbol{\nu})_v \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, hh_u(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v) \rangle + \langle \boldsymbol{x}, hh_v(\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu}) \rangle + \langle \boldsymbol{x}, h^2(\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu}_v) \rangle \\
&= \partial_u \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}_u, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_{uv} \right\rangle \\
&\quad + \partial_v \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}_v, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu}_{uv} \times \boldsymbol{\nu} \right\rangle \\
&= \partial_u \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v \right\rangle + \partial_v \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu} \right\rangle + \frac{h^2}{2} \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{\nu}_v + \boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle \\
&= \partial_u \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v \right\rangle + \partial_v \left\langle \boldsymbol{x}, \frac{h^2}{2}\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu} \right\rangle - h^2 H \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}
$$

最後の等式はワインガルテンの公式と平均曲率の表示式を用いている.

$$
\begin{aligned}
\text{残りの項} &= \langle h\boldsymbol{\nu}, (h\boldsymbol{\nu})_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle + \langle h\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times (h\boldsymbol{x})_v \rangle \\
&= \langle h\boldsymbol{\nu}, h\boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle + \langle h\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times h\boldsymbol{x}_v \rangle \\
&= -2h^2 H \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}
$$

なので, $V(t)$ の $t^2$ の係数は $\iint_D Hh^2 dA$ である.

$V(t)$ の $t^3$ の係数の被積分関数は次で与えられる.

$$
\langle h\boldsymbol{\nu}, (h\boldsymbol{\nu})_u \times (h\boldsymbol{\nu})_v \rangle = h^3 \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu}_v \rangle
$$

ワインガルテンの公式より, この項は,

$$
\begin{aligned}
&h^3 \left\langle \boldsymbol{\nu}, \Big( \frac{GL - FM}{EG - F^2} \frac{EN - FM}{EG - F^2} - \frac{GM - FN}{EG - F^2} \frac{EM - FL}{EG - F^2} \Big) \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \right\rangle \\
&= \frac{h^3 (LN - M^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle = Kh^3 \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \rangle
\end{aligned}
$$

なので, $V(t)$ の $t^3$ の係数は $\iint_D Kh^3 dA$ である.

**3.3.5** $L(t) = A_D(t) + \lambda(V(t) - V_D(\boldsymbol{x})$ とおくとき,

$$
L(t) = A_D(\boldsymbol{x}) + t \iint_D (\lambda - 2H) h \, dA + t^2 \iint_D \Big( \frac{|\nabla h|^2}{2} + h^2 (K - \lambda H) \Big) dA + O(t^3)
$$

なので, $2H = \lambda$ (定数) なる条件のもとでは, $L'(0) = 0$ となる. よって, $2H = \lambda$ (定数) なる条件が, 極値 (または停留点) である. $2H^2 - K = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}$ なので

$$
L(t) = A_D(\boldsymbol{x}) + \frac{t^2}{2} \iint_D [|\nabla h|^2 - h^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)] dA + O(t^3)
$$

**3.5.1** 補題 3.5.2 と同様である. $\omega(\boldsymbol{v}) = 0$ となるベクトル $\boldsymbol{v}$ は, $\omega = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$ に対し $\boldsymbol{v} = \lambda(-b(x, y) dx + a(x, y) dy)$ である. $\lambda$ が 0 でない定数のとき, $\omega$ の指数は $\boldsymbol{v}$ の指数と一致する.

**3.5.2** 式 (3.5.4) を写像 (3.5.6) で引き戻して $r$ で割り, $A(\theta) dr + B(\theta) r\, d\theta = 0$ を得る.

$$\begin{aligned}A(\theta) &= a_{10}\cos^2\theta + (a_{01}+b_{10})\cos\theta\sin\theta + b_{01}\sin^2\theta \\ &= \frac{a_{10}+b_{01}}{2} + \frac{a_{10}-b_{01}}{2}\cos 2\theta + \frac{a_{01}+b_{10}}{2}\sin 2\theta \\ B(\theta) &= b_{10}\cos^2\theta - (a_{10}-b_{01})\cos\theta\sin\theta - a_{01}\sin^2\theta \\ &= \frac{b_{10}-a_{01}}{2} + \frac{a_{01}+b_{10}}{2}\cos 2\theta - \frac{a_{10}-b_{01}}{2}\sin 2\theta \\ &= \frac{b_{10}-a_{01}}{2} + \frac{A'(\theta)}{2}\end{aligned}$$

$A(\theta)=r=0$ が特異点を定める．$\delta=(a_{01}+b_{10})^2-4a_{10}b_{01}$ とおく．$\delta<0$ ならば $A(\theta)$ は 0 とならず特異点はない．$\delta>0$ ならば $A(\theta)$ は 2 点で 0 となり，

$$(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = \frac{-(a_{10}+b_{01})(a_{10}-b_{01}, a_{01}+b_{10}) \pm (a_{01}+b_{10}, b_{01}-a_{10})\sqrt{\delta}}{(a_{01}+b_{10})^2+(a_{10}-b_{01})^2}$$

なので，そのとき $A'(\theta)=\pm\sqrt{\delta}/2$ を得る．さらに，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-B(\theta) & 0 \\ 0 & A'(\theta)\end{vmatrix} &= -A'(\theta)B(\theta) = \mp\frac{\sqrt{\delta}(b_{10}-a_{01}\pm\sqrt{\delta})}{4} \\ &= \frac{\sqrt{\delta}[\pm(a_{01}-b_{10})-\sqrt{\delta}]}{4}\end{aligned}$$

に注意して，$\sigma=a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}$ とおけば $\delta+4\sigma=(a_{01}-b_{10})^2$ であり，$\sigma>0$ のときは 2 点の特異点でこの行列式は正と負（結節点と鞍点），$\sigma<0$ のときはこの行列式は共に負（鞍点）となる．

**3.5.3** 計算すればよい．$\alpha_{01}-\beta_{10}=(a_{01}-b_{10})(p_1q_2-p_2q_1)$，$\alpha_{10}\beta_{01}-\alpha_{01}\beta_{10}=(a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10})(p_1q_2-p_2q_1)^2$．

**3.5.4** $R$, $S$ を $x, y$ の $k$ 次同次多項式として，次の方程式を考える．

$$(ax+a'y+R+o(k))dx+(bx+b'y+S+o(k))dy=0$$

適当な $u, v$ の $k$ 次同次多項式 $P$, $Q$ と，$k-1$ 次同次多項式 $F$ を選んで，座標変換 $x=u+P$, $y=v+Q$ によって次が成立するようにできるかどうかを調べる．

$$\begin{aligned}&(1+F)[(ax+a'y+R+o(k))dx+(bx+b'y+S+o(k))dy] \\ &\quad= (au+a'v+o(k))du+(bu+b'v+o(k))dv\end{aligned}$$

$\hat{a}=au+a'v$, $\hat{b}=bu+b'v$ と書くと，

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (1+F)[(\hat{a}+\partial_u(\hat{a}P)+\hat{b}Q_u+a'Q+R+o(k))du \\ &\quad + (\hat{b}+\hat{a}P_v+bP+\partial_v(\hat{b}Q)+S+o(k))dv] \\ &= (\hat{a}+\hat{a}F+\partial_u(\hat{a}P)+\hat{b}Q_u+a'Q+R+o(k))du \\ &\quad + (\hat{b}+\hat{b}F+\hat{a}P_v+bP+\partial_v(\hat{b}Q)+S+o(k))dv\end{aligned}$$

なので，次を満たすように $F$, $P$, $Q$ を選べればよい．

$$\hat{a}F + \partial_u(\hat{a}P) + \hat{b}Q_u + a'Q + R = 0, \quad \hat{b}F + \hat{a}P_v + bP + \partial_v(\hat{b}Q) + S = 0$$

これは $F$, $P$, $Q$, $R$, $S$ の係数の間の線形方程式である．

$k = 2$ の場合，その線形関係式の係数は次の行列で与えられる．

$$\begin{pmatrix}
2a & 0 & 3a & & & a'+2b & & \\
a' & a & a' & 2a & & b' & a'+b & \\
0 & 2a' & & 2a' & a & & 2b' & a' \\
2b & 0 & b & 2a & & b' & 2b & \\
b' & b & & a'+b & a & & 2b' & b \\
0 & 2b' & & & 2a'+b & & & 3b'
\end{pmatrix}$$

最初の 2 列は $F$ の $u, v$ の係数，次の 3 列は $P$ の $u^2, uv, v^2$ の係数，最後の 3 列は $Q$ の $u^2, uv, v^2$ の係数に対応している．この行列右端の $6 \times 6$ 行列の行列式は $\sigma^2\delta(2\sigma^2 - 9\delta)$ なので証明を終わる．なお，6 次小行列式はすべて $\delta(2\sigma^2 - 9\delta)$ で割り切れることに注意．

$k \geq 3$ の場合は，$P$, $Q$ の $u^k, u^{k-1}v, \cdots, v^k$ の係数部分に対応する行列は

$$\begin{pmatrix}
a_{k+1} & & & & & a'+b_k & & & & \\
a'_k & a_k & & & & b'_k & a'+b_{k-1} & & & \\
& a'_{k-1} & \ddots & & & & b'_{k-1} & \ddots & & \\
& & \ddots & a_2 & & & & \ddots & a'+b & \\
& & & a' & a & & & & b' & a' \\
b & a & & & & b' & b & & & \\
& a'+b & \ddots & & & & b'_2 & \ddots & & \\
& & \ddots & a_{k-1} & & & & \ddots & b_{k-1} & \\
& & & a'_{k-1}+b & a_k & & & & b'_k & b_k \\
& & & & a'_k+b & & & & & b'_{k+1}
\end{pmatrix}$$

となる．ただし $a_i = ia$, $a'_i = ia'$, $b_i = ib$, $b'_i = ib'$．$i+1$ 行（$i = 1, \cdots, k$）の $\frac{i}{k+1-i}$ 倍を $k+i+1$ 行から引いて，さらに $k+2+j$ 列（$j = 1, \cdots, k$）の $\frac{k-j+1}{j}$ 倍を $j$ 列から引き，行および列の入れ替えを行って，行列式は

$$\sigma^k \begin{vmatrix}
-a'-b_k & a_{k+1} & & & & \\
-b'_k & -kb_{k-1} & a_k & & & \\
& -kb'_{k-1} & \frac{k-1}{2}(a'-b_{k-2}) & \ddots & & \\
& & -\frac{k-1}{2}b'_{k-2} & \ddots & a_2 & \\
& & & \ddots -\frac{2}{k-1}b'_k & \frac{1}{k}a'_{k-1} & a \\
& & & & -\frac{1}{k}b'_{k+1} & a'_k+b
\end{vmatrix}$$

となる．$k = 3$ のとき $4\sigma^4\delta(16\delta - 3\sigma^2)$，$k = 4$ のとき $9\sigma^4\delta(25\delta - 4\sigma^2)(\delta + 2\sigma^2)$ なので証明を終わる．$k = 5, 6, \cdots$ のときは行列式は順に $32\sigma^6\delta(5\sigma^2 - 36\delta)(3\sigma^2 + 4\delta)$, $25\sigma^6\delta(49\delta - 6\sigma^2)(4\sigma^2 + 9\delta)(6\sigma^2 + \delta)$，$432\sigma^8\delta(7\sigma^2 - 64\delta)(5\sigma^2 + 16\delta)(2\sigma^2 + \delta)$, $49\sigma^8\delta(81\delta - 8\sigma^2)(6\sigma^2 + 25\delta)(10\sigma^2 + 9\delta)(12\sigma^2 + \delta), \cdots$ となるので，高次の項まで消去しようとすると，条件が増えていく様子がわかる．

**3.5.5** 点 $\boldsymbol{p}$ を通る 2 本のフローを（例えば弧長変数で）径数付けておく．それらを $\gamma_1(u)$, $|u| < \varepsilon_1$; $\gamma_2(v)$, $|v| < \varepsilon_2$ と書く．$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \boldsymbol{p}$ である．ここで $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ は十分小さい正の数とする．$S$ の点 $\boldsymbol{q}$ に対し $\boldsymbol{q}$ を通る 2 本のフローを $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ とするとき，

$$X(\boldsymbol{q}) = \{(u, v) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) : \gamma_1(u) \in \Gamma_2, \gamma_2(v) \in \Gamma_1\},$$

$U = \{\boldsymbol{q} \in S : X(\boldsymbol{q})$ が 1 点 $\}$ とおく．$\boldsymbol{x}(u, v) = \boldsymbol{q}$ を $(u, v) \in X(\boldsymbol{q})$ で定めればよい．

**3.6.1** $k = 1$ のときは明らかであるから，$k - 1$ のときを仮定して，$k$ のときを示せばよい．$A$, $B$, $C$ を $x, y$ の $k$ 次同次多項式として，元の方程式を

$$(x + A + o(k))dx^2 + 2(B + o(k))\,dx\,dy + (1 + C + o(k))dy^2 = 0$$

と書いておく．$u, v$ の $k$ 次同次多項式 $F$, $P$ と $k + 1$ 次同次多項式 $Q$ をとり $x = u + P$, $y = v + Q$ とおく．$F$, $P$, $Q$ をうまく定めれば

$$\begin{aligned}&(1 + F)[(x + A + o(k))dx^2 + 2(B + o(k))\,dx\,dy + (1 + C + o(k))dy^2]\\&\quad = (u + o(k))du^2 + o(k)\,du\,dv + (1 + o(k))dv^2\end{aligned}$$

となることを示す．まず次に注意する．

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (1 + F)[(u + P + A + o(k))((1 + P_u)du + P_v dv)^2\\&\quad + 2(B + o(k))((1 + P_u)du + P_v dv)(Q_u du + (1 + Q_v)dv)\\&\quad + (1 + C + o(k))(Q_u du + (1 + Q_v)dv)^2]\\&= (1 + F)[(u + P + A + 2uP_u + o(k))du^2 + 2(uP_v + B + Q_u + o(k))du\,dv\\&\quad + (1 + C + 2Q_v + o(k))dv^2]\\&= (u + P + A + 2uP_u + o(k))du^2 + 2(uP_v + B + Q_u + o(k))du\,dv\\&\quad + (1 + C + 2Q_v + F + o(k))dv^2\end{aligned}$$

$A = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i v^{k-i}$, $P = \sum_{i=0}^{k} p_i u^i v^{k-i}$ とおくと

$$P + 2uP_u = \sum_{i=0}^{k} (1 + 2i)p_i u^i v^{k-i}$$

なので $(1 + 2i)p_i + a_i = 0$ なるように $p_i$ を定めると，$P + 2uP_u + A = 0$ となる．さらに $uP_v + B + Q_u = 0$ なるように $Q$ を定め，$C + 2Q_v + F = 0$ を満たすように $F$ を決めればよい．

**3.6.2** $k = 1$ のときは明らかであるから，$k - 1$ のときを仮定して，$k$ のときを示せばよい．$A$, $B$, $C$ を $x, y$ の $k$ 次同次多項式として，元の方程式を

$$(y + \tfrac{\lambda}{2}x^2 + A + o(k))dx^2 + 2(B + o(k))\,dx\,dy + (1 + C + o(k))dy^2 = 0$$

と書いておく．ただし，$A$ は $x^2$ の項を含まないとしておく．$u, v$ の $k$ 次同次多項式 $F$, $P$ と $k + 1$ 次同次多項式 $Q$ をとり，$x = u + P$, $y = v + Q$ とおいて

$$\begin{aligned}&(1 + F)(y + \tfrac{\lambda}{2}x^2 + A + o(k))dx^2 + 2(B + o(k))\,dx\,dy + (1 + C + o(k))dy^2\\&\quad = (v + \tfrac{\lambda}{2}u^2 + o(k))du^2 + o(k)du\,dv + (1 + o(k))dv^2\end{aligned}$$

を満たすように $P$, $Q$, $F$ を定めることを考える．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (1+F)[(v+Q+\tfrac{\lambda}{2}(u+P)^2+A)((1+P_u)du+P_v dv)^2\\
&\quad +2B((1+P_u)du+P_v dv)(Q_u du+(1+Q_v)dv)+(1+C)(Q_u du+(1+Q_v)dv)^2]\\
&= (1+F)[(v+\tfrac{\lambda}{2}u^2+Q+A+2vP_u+o(k))du^2+2(uP_v+B+Q_u+o(k))du\,dv\\
&\quad +(1+C+2Q_v+o(k))dv^2]\\
&= (v+\tfrac{\lambda}{2}u^2 s+A+2vP_u+o(k))du^2+2(vP_v+B+Q_u+o(k))du\,dv\\
&\quad +(1+C+2Q_v+F+o(k))dv^2
\end{aligned}
$$

なので $A+2vP_u=0$, $vP_v+B+Q_u=0$, $C+2Q_v+F=0$ となるように $P$, $Q$, $F$ を定めればよい.

**3.6.3** 双曲的領域を $S_-$ で表すと,

$$
\chi(S_-)=\frac{1}{2}\chi(\tilde{S})=\frac{1}{2}(\text{折畳焦点と折畳結節点の個数の和} - \text{折畳鞍点の個数})
$$

# あとがき

本書は，2008 年度，2009 年度，2014 年度に埼玉大学理学部で「幾何学序論」の講義を担当した際に用意した講義ノートが基になっている．半期で幾何学の初歩を講義する場合の著者の第 1 選択は次のような案である．

| | | |
|---|---|---|
| 1 回目 | 曲線の定義と例 | 1.1 節 |
| 2 回目 | 弧長変数 | 1.2 節 |
| 3 回目 | 平面曲線の曲率 | 1.3.1 節 |
| 4 回目 | 平面曲線の基本定理 | 1.3.3 節 |
| 5 回目 | 平面閉曲線の回転数とホモトピー | 1.6.3 節 |
| 6 回目 | $\mathbb{R}^3$ の空間曲線と曲率 | 1.7.1 節 |
| 7 回目 | 曲面の定義と例 | 2.1 節 |
| 8 回目 | 1 階偏微分と第 1 基本形式 | 2.2 節 |
| 9 回目 | 2 階偏微分と第 2 基本形式 | 2.3 節 |
| 10 回目 | 3 階偏微分と曲面論の基本定理 | 2.5 節 |
| 11 回目 | 曲面上の曲線と曲面の曲率 | 2.4 節 |
| 12 回目 | 測地線と測地的極座標 | 2.4.3, 2.6.1 節 |
| 13 回目 | ガウス・ボンネの定理 | 2.6.2 節 |

曲線論や曲面論の基本定理や，ガウス・ボンネの定理は講義で目標となることが多いと思われる．余計なものは削ぎ落として，目標に最短で到達できるようにテキストを準備するという考え方もあるだろうが，本書を準備する際はそのようには考えなかった．むしろ，いろいろな定理や例を紹介して，最終目標に到達する前にも楽しめるようにしたいと考えた．そのため，多様体の一般論は説明しないこととし，具体的な計算を重視，あちこちに小さいトピックを配置し，幾何的な計算を堪能するとはいかないまでも，少なくとも楽しめるように工夫して準備した積りである．したがって講義では，適当に内容を端折る形で行い，空いた時間で演習を行えば，半期で丁度良い量と思う．もちろんこの内のいくつかの話題を他の話題と入れ替えることは可能で，例えば，測地的極座標やガウス・ボンネの定理の代わりに空間閉曲線のミルナーの定理やガウ

スの絡み目積分（1.7.3, 1.7.4 節）を扱ったり，双曲平面（3.2 節）や極小曲面（3.3 節）を扱ってもよい．

1.3.2 節では，平面曲線について曲線と直線や円との接触と曲率の関連を述べたが，これは空間曲線や曲面にも一般化され，特異点論の立場から詳細な研究が可能である．3.4 節にその一端を述べたが，詳しくは次の本を見るとよい．

泉屋周一・佐伯修・佐野貴志・佐久間一浩著『特異点の数理〈1〉幾何学と特異点』（特異点の数理 1）共立出版，2001.

I. Porteous, *Geometric Differentiation for the Intelligence of Curves and Surfaces*, Cambridge, 1994, 2001.

S. Izumiya, C. Romero-Fuster, M. Ruas, and F. Tari, *Differential Geometry from Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, 2015.

3.6 節で漸近線と曲率線の特異点を紹介したが，臍点での曲率線の特異点の分類はダルブーによってなされた．星（スター），檬星（モンスター），檸檬（レモン）は次の文献に使われてからこの呼び方が拡がった．

M. V. Berry and J. H. Hannay, Umbilic points on Gaussian random surfaces, *J. Phys. A*, **10**, 1977, pp.1809–21.

前掲の Porteous の本に，臍点と峰点の関連など詳しい説明がある．なお，漸近線の特異点の分類は意外に新しく，1982 年出版の次が初出と思われる．

T. Banchoff, T. Gaffney, and C. McCrory, *Cusps of Gauss Mappings*[1].

以下に，本書を作成する際，参照した文献を掲げて，謝意を表する．

- 梅原雅顕・山田光太郎著『曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—』裳華房，2002.
- 安達忠次著『微分幾何学概説』培風館，1976.
- 窪田忠彦著（佐々木重夫編集）『微分幾何学』岩波全書，1957.
- Manfredo P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[1] 本書には web 版 `http://www.emis.de/monographs/CGM/index.html` がある．

- A. R. Forsyth, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Cambridge, 1912.
- Mohammad Ghomi, *Lecture Notes on Differential Geometry*, 2004. `http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/index.html`
- J. Milnor, On the total curvature of knots, *Annals of Mathematics*, **52**, 1950, pp.248–257.
- S.-S. Chern, An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, 1955, pp.771–782.
- Wikipedia


平面曲線の場合は，曲率 $\kappa$ は $x$ 軸となす角度 $\theta$ を用いて $d\theta = \kappa ds$ という関係式を満たす．曲面の場合には，これは次のように一般化される．すなわち，$K$ をガウス曲率 $dA$ を面積要素としたとき $d\theta = K\,dA$ を満たす 1 形式 $\theta$ が存在する．$\theta$ を接続形式といい，広く計算に活用されている．接続形式については多くの微分幾何の教科書に解説されているのでそれらを参照されたい．

著者が今まで聞いた講義や講演，研究集会やセミナーを通じて学んだ事柄が，直接あるいは間接に本書に反映されている．それらには数学の個別の知識ももちろん含まれているが，アイデアを端的に表現するにはどうしたら良いか等，理解のスタイルや説明のスタイルも含まれている．御教示戴いたことを背景に原稿を準備することは，著者にとって幸福な時間であった．個別にお名前を挙げることはできないが，この場で改めて感謝の意を表しておきたい．しかしながら浅学非才の身である．思い違いや誤りも本書に含まれていると思う．それらは著者の責任であるが，読者の御寛恕を乞うと共に，お気付きの誤り等を御一報下されば誠にありがたい．

原稿を見てコメントをくれた裴東河，長谷川大，中川幸一の諸氏，3.4 節，3.6 節の内容について講義する機会を下さった梅原雅顕，山田光太郎両氏，第 3 章の原稿の間違いを数多く指摘してくれた東工大の学生諸氏に謝意を表する．

そして，遅々として進まなかった執筆作業を，終始暖かく見守ってくださった牧野書店の牧野末喜氏にも感謝したい．

最後に，本文中に現れた数学者の生没年を掲げ，彼らの活躍に思いを馳せたい．

デカルト (René Descartes, 1596–1650) フランスの哲学者，数学者，座標を導入した．
オイラー (Leonhard Paul Euler, 1707–83) スイスの数学者，ロシア・ドイツで活躍
ワット (James Watt, 1736–1819) スコットランドの数学者，技術者
モンジュ (Gaspard Monge, 1746–1818) フランスの数学者
ガウス (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) ドイツの数学者，天文学者，物理学者
コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) フランスの数学者
ロバチェフスキー (Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1793–1856) ロシアの数学者
シュタイナー (Jakob Steiner 1796–1863) スイスの数学者
マイナルジ (Gaspare Mainardi, 1800–79) イタリアの数学者
ヤーノシュ (Bolyai Janos, 1802–60) ハンガリー領トランシルヴァニア（現ルーマニア領）出身のハンガリー人数学者
ワイエルシュトラス (Karl Weierstrass, 1815–97) ドイツの数学者
フレネ (Jean Frédéric Frenet, 1816–1900) フランスの数学者
セレ (Joseph Alfred Serret, 1819–85) フランスの数学者
ボンネ (Ossian Pierre Bonnet, 1819–92) フランスの数学者
ブーケー (Jean Claude Bouquet, 1819–85) フランスの数学者
コダッチ (Delfino Codazzi, 1824–73) イタリアの数学者
リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–66) ドイツの数学者
クリストッフェル (Elwin Bruno Christoffel, 1829–1900) ドイツの数学者，物理学者
ルーロー (Franz Reuleaux, 1829–1905) ドイツの機械技師，運動学の父
エネッパー (Alfred Enneper, 1830–85) ドイツの数学者
ベルトラミ (Eugenio Beltrami, 1835–1900) イタリアの数学者
ワインガルテン (Julius Weingarten, 1836–1910) ドイツの数学者
ダルブー (Jean Gaston Darboux, 1842–1917) フランスの数学者
クライン (Felix Christian Klein, 1849–1925) ドイツの数学者
ポアンカレ (Jules Henri Poincaré, 1854–1912) フランスの数学者
クネーザー (Adolf Kneser, 1862–1930) ドイツの数学者
シューア (Axel Schur, 1891–1930) ドイツの数学者
ホイットニー (Hassler Whitney, 1907–89) アメリカの数学者
ファリィ (István Fáry，1922–84) ハンガリー生まれの数学者
ポーチャス (Ian R. Porteous, 1930–2011) スコットランドの数学者
ミルナー (Jhon Milnor, 1931–) アメリカの数学者
ケンデリンク (Jan J. Koenderink, 1943–) アメリカの物理学者，数学者

# 索　引


$A_k$ 特異点, 130

$D_4$ 特異点, 130

$\mathcal{K}$ 同値, 133

Sine-Gordon の方程式, 108

アステロイド, 5, 7
鞍点, 142

イソトピー, 53

エネッパー (Ennepper) の極小曲面, 126
エピサイクロイド, 4
　-の弧長, 15
　-の縮閉線, 27
エピトロコイド, 5
円筒図法, 111

オイラー (Euler) 数, 95
オイラーの公式, 99
折畳特異点（鞍点，結節点，焦点）, 147

外積, 45
回転数, 38
回転トーラス, 62
回転面, 62, 70, 82
　定曲率-, 82
外擺線, 4
外余擺線, 5
ガウス・ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理, 92
ガウス曲率, 78, 86
ガウスの基礎方程式, 85
ガウスの驚異の定理, 86
可展面, 96, 109
絡み目数, 55
絡み目積分, 55
管（チューブ）, 63
　-の主曲率, 82
　-の表面積, 70

球面, 60
共役方向, 72
極小曲面, 122
　エネッパーの-, 126
曲線論の基本定理, 22, 48
曲率, 15, 46
　サイクロイドの-, 24
　双曲線の-, 23
　楕円の-, 17, 23
　ハイポサイクロイドの-, 23
曲率円, 21
曲率線, 102
曲率線座標, 102
曲率中心, 22
曲率半径, 22
曲率ベクトル, 75

屈曲度, 53
クライン (Klein) 円盤モデル, 117
クリストッフェル (Christoffel) の記号, 71, 73
グリセット, 6

形式右同値, 130
結節点, 142
懸垂曲面, 126

ケンデリンク (Koenderink) の定理, 78

交差帽子, 63
コーシー (Cauchy) の積分公式, 12
弧長, 8
　エピサイクロイドの-, 15
　サイクロイドの-, 10
　楕円の-, 10
弧長変数, 10

サイクロイド, 3, 7
　-の曲率, 24
　-の弧長, 10
　-のフレネ枠, 15

ジェット, 129, 130
指数, 139, 143, 146
シッソイド, 3, 14
シューア (Schur) の腕長補題, 34
主曲率, 78
　管の-, 82
縮小写像の原理, 163
縮閉線, 23
　エピサイクロイドの-, 27
　ハイポサイクロイドの-, 27
主方向, 79
焦点, 142
焦点面, 104
常螺旋面, 63, 126
伸開線, 23

ストロフォイド, 3

正積図法, 113
正則ホモトピー, 39
臍点, 78
　-の分類, 150
星芒形, 5, 7
接触, 19, 132
　円との-, 20
　球との-, 136
　直線との-, 20
　平面との-, 135
接触同値, 133
接ベクトル, 67
全曲率, 38, 50, 52
漸近線, 106
漸近線座標, 106
漸近方向, 73
線織面, 63
線素, 10

双曲線, 2, 175
　-の曲率, 23
双曲的, 78
双曲平面, 117
　-のクライン円盤モデル, 117
　-の上半平面モデル, 120
　-のポアンカレ円盤モデル, 118
測地円, 95
測地線, 81
測地的極座標, 89
測地的曲率, 76, 80
　-ベクトル, 76
測地的多角形, 94
測地的捩率, 82

第 1 基本形式, 66
対数螺線, 7
　-の弧長, 11
代数螺線, 7
第 2 基本形式, 71
楕円, 2, 24, 175
　-の曲率, 17, 23
　-の弧長, 10
楕円的, 78
単位接ベクトル, 14
単位法ベクトル, 14
単純閉曲線, 33

中心曲面, 104
中心射影, 114
チューブ（管）, 63, 70, 82
頂点, 16
直截口, 76

定傾曲線, 58
定幅曲線, 13
デカルト (Descartes) の定理, 98

等温座標, 100
等周不等式, 37
トーラス結び目, 45
トロコイド, 4

内擺線, 5
内余擺線, 6

2 次曲面, 60
2 重方向場, 145

擺線, 3
ハイポサイクロイド, 5
　-の曲率, 23
　-の縮閉線, 27
　-のフレネ・セレ枠, 15
ハイポトロコイド, 6
判別集合, 146

ブーケー (Bouquet) の公式, 47
フレネ・セレ (Frenet-Serret) の公式, 46
フレネ・セレ枠, 46
　ハイポサイクロイドの-, 15
フレネの公式, 16
フレネ枠, 15
　サイクロイドの-, 15

閉曲線, 33
閉曲面, 138
平均曲率, 78
平均曲率ベクトル, 123
平行移動, 82
平行である, 82
平行曲線, 17
平行曲面, 102
ベクトル場, 139
ヘリコイド, 63, 126
ヘルダー連続, 157
ベルトラミ (Beltrami) の方程式, 159
変曲点, 16

ポアンカレ (Poincaré) 円盤モデル, 118
ホイットニー (Whitney) の傘, 63
ホイットニーの公式, 43
ホイットニーの定理, 40
法曲率, 76, 78
法曲率ベクトル, 76
方向場, 141
放物線, 14, 24, 29
放物的, 78
法平面断面, 76
法変分, 122
包絡線, 27
星, 150

マイナルジ・コダッチ (Mainardi-Codazzi) の基礎方程式, 85
巻き数, 41

右同値, 130
峰点, 134
ミンコフスキー (Minkowski) 空間, 116

向き（曲線の）, 33
向き（曲面の）, 69

メビウス (Möbius) の帯, 63
メルカトル (Mercator) 図法, 112
面積要素, 68

モンジュ (Monge) の標準形, 98
檬星, 150

有向曲線, 33

余擺線, 4
4 頂点定理, 33

螺線, 6, 48
卵形線, 33

立体射影, 114
輪郭, 73, 78

ルーロー (Reuleaux) の 3 角形, 13

捩率, 46
劣放物点, 104
レムニスケート, 3, 23
檸檬, 150

ローマ曲面, 64

ワイエルシュトラス (Weierstrass) の表現公式, 124
ワインガルテン (Weingarten) の公式, 74
枠, 46
ワット (Watt) 曲線, 6

## 著者紹介

福井 敏純 (ふくい としずみ)

1960 年東京に生まれる．1983 年横浜国立大学教育学部卒業．1989 年東京都立大学大学院理学研究科博士課程満期退学．1992 年博士（理学）（東京都立大学）．現在埼玉大学理工学研究科教授

［専門］特異点論．［主要著書］解析関数と特異点（特異点の数理 第 3 巻）（共著，共立出版，2002 年），代数曲線と特異点（特異点の数理 第 4 巻）（共著，共立出版，2001 年）

理工系数学の基礎・基本⑮

曲線と曲面の基礎・基本

2015 年 6 月 10 日　初版第 1 刷発行

著　者---------福井敏純

発行者---------牧野末喜

発行所---------(有)牧野書店

〒114-0024 東京都北区西ヶ原 3-60-18

電話(03)3949-2344・振替 00190-0-661932

http://www.makinoshoten.co.jp/

発売所---------(株)星雲社

〒112-0012 東京都文京区大塚 3-21-10

電話(03)3947-1021・FAX(03)3947-1617

印刷・製本----大日本法令印刷(株)



ISBN978-4-434-20630-6 C3341